Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

11. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ Sommersemester 2008

Abgabetermin: Mittwoch, 25.6.08, bis 10.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 41: Es seien $v \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in D$ mit $v(x_0) = 0$ und $U \subseteq D$ eine Umgebung von x_0. Es gebe $L \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ mit $L(x_0) = 0$, so dass L in x_0 kein lokales Maximum hat, sowie $\lambda > 0$ mit $D_v L(x) \geq \lambda L(x)$ für alle $x \in U$. Dann ist die stationäre Lösung x_0 von $\dot{x} = v(x)$ instabil.

Hinweis: Für $f(t) = L(\varphi^\xi(t))$ gilt $\dot{f}(t) \geq \lambda f(t)$.

Aufgabe 42: Es seien $v \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in D$ mit $v(x_0) = 0$ und $A = Dv(x_0)$. Ist $s(A) > 0$, so ist x_0 instabil.

Anleitung: Betrachten Sie die Zerlegung $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$ mit

$$V_1 = \bigoplus_{\operatorname{Re}\mu_k > 0} V(A; \mu_k) \qquad \text{und} \qquad V_2 = \bigoplus_{\operatorname{Re}\mu_k \leq 0} V(A; \mu_k)\,.$$

Definieren Sie wie in 14.7 der Vorlesung Skalarprodukte $\langle \cdot | \cdot \rangle_j$ (mit zugehörigen Normen $\| \cdot \|_j$) für $j = 1, 2$, so dass

$$\langle Ax_1 \,|\, x_1 \rangle_1 = \tfrac{1}{2} |x_1|^2 \geq \lambda \|x_1\|_1^2$$

für alle $x_1 \in V_1$ und

$$\langle Ax_2 - \varepsilon x_2 \,|\, x_2 \rangle_2 = -\tfrac{1}{2} |x_2|^2$$

für alle $x_2 \in V_2$ gilt. Wählen Sie $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$ und verwenden Sie Aufgabe 41 mit

$$L(x_1 \oplus x_2) = \langle x_1 \,|\, x_1 \rangle_1 - \langle x_2 \,|\, x_2 \rangle_2\,.$$

Aufgabe 43: Gegeben sei das *Lorenz-System*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

mit $\sigma, r, b > 0$.

a) Berechnen Sie die kritischen Punkte von v für $0 < r \leq 1$ und für $r > 1$.

b) Zeigen Sie, dass der Nullpunkt für $r > 1$ instabil und für $0 < r < 1$ ein Attraktor, sogar ein *globaler* Attraktor ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Ljapunov-Funktion $L(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2\right)$.

c) Zeigen Sie, dass die Linearisierungen in den beiden von Null verschiedenen kritischen Punkten die gleichen Eigenwerte haben. Zeigen Sie asymptotische Stabilität für $r > 1$ und $b + 1 \geq \sigma$.

d) Nun sei $b + 1 < \sigma$. Für welche r sind die beiden von Null verschiedenen stationären Lösungen asymptotisch stabil bzw. instabil?