Musterlösung zu Blatt 11

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sommersemester 2008

41 **Annahme:** x_0 stabil

Es sei $K \subseteq U$ eine kompakte Umgebung von x_0 (z.B. eine kompakte Kugel). Wegen der Stabilitätsbedingung existiert eine Umgebung $V \subseteq K$ von x_0, so dass für jedes $\xi \in V$ eine maximale Lösung φ^ξ mit $\varphi^\xi(0) = \xi \in V$ auf $[0,\infty)$ definiert ist und $\varphi^\xi(t) \in K$ für alle $t \geq 0$ gilt. Da L nach Voraussetzung kein lokales Maximum in x_0 hat, existiert ein $\xi \in V$ mit $L(\xi) > L(x_0) = 0$. Für $f := L \circ \varphi^\xi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folgt dann mit der Kettenregel

$$\dot{f}(t) \;=\; DL(\varphi^\xi(t))\underbrace{\dot{\varphi}^\xi(t)}_{=v} \;=\; D_vL(\varphi^\xi(t)) \;\geq\; \lambda L(\varphi^\xi(t)) \;=\; \lambda f(t)$$

für alle $t \in [0,\infty)$ und wegen $f(0) > 0$ und $\lambda > 0$ damit

$$\log\frac{f(t)}{f(0)} \;=\; \int_0^t \frac{\dot{f}(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau \;\geq\; \int_0^t \lambda\,dt \;=\; \lambda t \quad\Rightarrow\quad f(t) \;\geq\; f(0)e^{\lambda t} \;\to\; \infty$$

für $t \to \infty$, d.h. $L \circ \varphi^\xi$ ist unbeschränkt. Andererseits ist L stetig und somit $L(K)$ kompakt. **Widerspruch!**

Also ist x_0 instabil.

42 Sei also, wie in der Anleitung angegeben, $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$ mit

$$V_1 \;=\; \bigoplus_{\operatorname{Re}\mu_k > 0} V(A;\mu_k) \qquad\text{und}\qquad V_2 \;=\; \bigoplus_{\operatorname{Re}\mu_k \leq 0} V(A;\mu_k)\,.$$

Da nicht reelle Eigenwerte von A in Paaren komplex-konjugierter Eigenwerte auftreten, induziert die obige Zerlegung eine entsprechende Zerlegung $\mathbb{R}^n = U_1 \oplus U_2$, die im Folgenden betrachtet werde.

Durch

$$\langle x_1 \,|\, y_1\rangle_1 \;:=\; \int_0^\infty \langle e^{-At}x, e^{-At}y\rangle\,dt$$

wird wie in 14.7 a) ein Skalarprodukt auf U_1 definiert, da die Einschränkung von $-A$ auf U_1 nur Eigenwerte mit negativem Realteil hat.

Entsprechend wird durch

$$\langle x_2 \,|\, y_2\rangle_2 \;:=\; \int_0^\infty \langle e^{Bt}x, e^{Bt}y\rangle\,dt$$

mit $B := A - \varepsilon I$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein Skalarprodukt auf U_2 definiert, da die Einschränkung von B auf U_2 nur Eigenwerte mit negativem Realteil hat.

Wie in 14.7 c) lässt sich

$$\langle Ax_2 - \varepsilon x_2 \,|\, x_2\rangle_2 \;=\; \langle Bx_2 \,|\, x_2\rangle_2 \;=\; -\tfrac{1}{2}\,|x_2|^2$$

für alle $x_2 \in U_2$ berechnen und entsprechend

$$\langle Ax_1 \,|\, x_1\rangle_1 \;=\; \tfrac{1}{2}\,|x_1|^2$$

für alle $x_1 \in U_1$. Da auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind, existiert zudem ein $\lambda > 0$, so dass

$$\langle Ax_1 \,|\, x_1\rangle_1 \;=\; \tfrac{1}{2}\,|x_1|^2 \;\geq \lambda\,\|x_1\|_1^2$$

für alle $x_1 \in U_1$ gilt.

Wähle nun $\varepsilon := \frac{\lambda}{2}$ und definiere

$$L(x_1 \oplus x_2) \;:=\; \langle x_1 \,|\, x_1\rangle_1 - \langle x_2 \,|\, x_2\rangle_2$$

für $x_1 \oplus x_2 \in U_1 \oplus U_2$.

Es sei o.E. $L(x_0) = 0$. Da U_1 wegen der Voraussetzung $s(A) > 0$ sicherlich nicht trivial ist, hat L in x_0 kein lokales Maximum.

Wie in 14.7 c) ist

$$v(x) \;=\; Ax + g(x)$$

mit $g(x) = o(|x|)$ für $x \to 0$ und $2\langle g(x_j) \,|\, x_j\rangle_j = o(|x_j|^2)$ für $j = 1, 2$. Desweiteren ist

$$\partial_v L(x_1 \oplus x_2) \;=\; 2\langle Ax_1 \,|\, x_1\rangle_1 + 2\langle g(x_1) \,|\, x_1)\rangle_1 - 2\langle Ax_2 \,|\, x_2\rangle_2 - 2\langle g(x_2) \,|\, x_2)\rangle_2$$

und mit

$$\langle Ax_2 \,|\, x_2\rangle_2 \;=\; \langle Bx_2 \,|\, x_2\rangle_2 + \varepsilon\langle x_2 \,|\, x_2\rangle_2$$

folgt:

$$\partial_v L(x_1 \oplus x_2) \;=\; |x_1|^2 + |x_2|^2 - 2\varepsilon\|x_2\|_2^2 + 2\langle g(x_1) \,|\, x_1)\rangle_1 - 2\langle g(x_2) \,|\, x_2)\rangle_2$$

Daraus ergibt sich die Abschätzung

$$\partial_v L(x_1 \oplus x_2) \;\geq\; \tfrac{1}{2}|x_1|^2 + \tfrac{1}{2}|x_2|^2 - 2\varepsilon\|x_2\|_2^2 \;\geq\; \lambda\|x_1\|_1^2 - \lambda\|x_2\|_2^2 \;=\; \lambda L(x_1 \oplus x_2)$$

auf einer Umgebung von x_0. Somit kann schließlich Aufgabe 41 angewendet werden, und es folgt, dass x_0 instabil ist.

43 a) $(x, y, z)^T$ ist genau dann ein kritischer Punkt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

$$x \;=\; y \quad \text{und} \quad (r - z - 1)x \;=\; 0 \quad \text{und} \quad x^2 \;=\; bz$$

1. Fall: $x = 0$

Es folgt unmittelbar $x = y = z = 0$.

2. Fall: $x \neq 0$

Aus der zweiten Bedingung folgt $z = r - 1$ und aus der dritten dann $x^2 = b(r-1)$. Letztere Gleichung besitzt nur dann eine reelle Lösung, wenn $r \geq 1$ gilt. Ist $r = 1$, so ergibt sich erneut der Nullpunkt als Lösung. Ist $r > 1$, so folgt:

$$x \;=\; y \;=\; \pm\sqrt{b(r-1)}$$

Insgesamt ist also der Nullpunkt in jedem Fall ein kritischer Punkt, und im Falle $r > 1$ zusätzlich die beiden Punkte

$$(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)^T\,,\;\; (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)^T\,.$$

b) Die Linearisierung im Nullpunkt ist gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom

$$-(b+\lambda)(\lambda^2 + (\sigma+1)\lambda + 1 - r\sigma)\,.$$

Sie besitzt also die Eigenwerte

$$-b\,,\ \frac{1}{2}\left(-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4r\sigma}\right),$$

die alle reell sind und von denen zwei stets negativ sind.

Für $r > 1$ ist der Eigenwert

$$\frac{1}{2}\left(-1-\sigma + \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4r\sigma}\right)$$

positiv und der Nullpunkt somit nach Aufgabe 42 instabil.

Ist nun $0 < r < 1$, so sind alle drei Eigenwerte negativ, und der Nullpunkt ist somit nach 13.10 und 11.6 ein Attraktor. Er ist sogar ein globaler Attraktor, wie sich mit Hilfe der angegebenen Ljapunov-Funktion L einsehen lässt. Der Nullpunkt ist ein isoliertes Minimum von L, und die Ableitung

$$\partial_v L(x,y,z) \;=\; \langle \operatorname{grad} L(x,y,z), v(x,y,z)\rangle \;=\; -(x^2 - (r+1)xy + y^2 + bz^2)$$

ist für alle $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ negativ, denn es ist

$$x^2 - (r+1)xy + y^2 + bz^2 \;=\; \left(x - \frac{r+1}{2}y\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2\right) y^2 + bz^2 \;>\; 0$$

wegen $r < 1$. Mit Bemerkung 14.6 a) folgt unmittelbar die Behauptung, da die Menge

$$M_c \;=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\sigma}\,x^2 + y^2 + z^2\right) \leq c\}$$

für jedes $c \geq 0$ kompakt ist.

Bemerkung: Im Falle $r = 1$ ist L eine Ljapunov-Funktion des Nullpunkts und dieser somit stabil.

c) Die Linearisierungen der beiden von Null verschiedenen kritischen Punkte sind

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}.$$

Die charakteristischen Polynome beider Linearisierungen sind identisch, nämlich

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1),$$

d.h. die Linearisierungen haben die gleichen Eigenwerte. Benutze nun das Routh-Hurwitz-Kriterium (13.6), um festzustellen, ob $s(A) < 0$ gilt. Dazu werden die Hauptminoren Δ_i $(i = 1, 2, 3)$ der Matrix

$$\begin{pmatrix} \sigma + b + 1 & 1 & 0 \\ 2\sigma b(r-1) & b(\sigma + r) & \sigma + b + 1 \\ 0 & 0 & 2\sigma b(r-1) \end{pmatrix}$$

untersucht. Es ist

$$\Delta_1 \;=\; \sigma + b + 1 \;>\; 0$$

und

$$\Delta_2 \;=\; b(\sigma(\sigma + b + 3) + r(b + 1 - \sigma))$$

und

$$\Delta_3 \;=\; 2\sigma b(r-1)\Delta_2\,.$$

Wegen $r > 1$ und $b + 1 \geq \sigma$ sind die drei Hauptminoren alle positiv, und die beiden Lösungen sind somit nach 13.8 asymptotisch stabil.

d) Gilt nun $r > 1$ und $b + 1 < \sigma$, so ist Δ_2 (und damit auch Δ_3) genau dann positiv, wenn

$$1 \;<\; r \;<\; \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

gilt. In diesem Fall sind die beiden kritischen Punkt nach 13.8 asymptotisch stabil.

Ist dagegen $r > 1$ und

$$r \;>\; \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}\,,$$

so ist nach dem Routh-Hurwitz-Kriterium $s(A) \geq 0$. Es existiert jedoch kein Eigenwert mit Realteil Null, denn Null selbst ist offenbar keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, und existiert ein Paar komplex-konjugierter Nullstellen $\pm i\sqrt{D}$ mit $D > 0$, so ist das charakteristische Polynom von der Form

$$(x + \alpha)(x^2 + D) \;=\; x^3 + \alpha x^2 + Dx + \alpha D$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Für das in Teil c) berechnete charakteristische Polynom müsste also gelten:

$$(\sigma + b + 1)b(\sigma + r) \;=\; 2\sigma b(r - 1)$$

Dies ist aber äquivalent zu

$$r \;=\; \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}\,,$$

was nach Voraussetzung nicht erfüllt ist. Also ist $s(A) > 0$, und nach Aufgabe 42 sind beide kritischen Punkte instabil.

Bemerkung: Im Falle

$$r \;=\; \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \;>\; 1$$

sind die kritischen Punkte nach Bemerkung 11.6 stabile Punkte der Linearisierung. Auf die Stabilität für das Lorenz-System lassen sich daraus aber keine Rückschlüsse ziehen.

sawo