Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

12. Übungsblatt zu „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ Sommersemester 2008

Abgabetermin: Mittwoch, 2.7.08, bis 10.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 44: Es sei $\varphi = \varphi(t,a,\xi)$ die Lösung des Anfangswertproblems mit getrennten Variablen

$$\dot{x} \;=\; f(t)\,g(x)\,, \quad x(a) \;=\; \xi\,,$$

wobei $f \in \mathcal{C}(I)$, $g \in \mathcal{C}(J)$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Berechnen Sie $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$.

Aufgabe 45: Gegeben sei das *Lorenz-System*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

mit $\sigma, r, b > 0$ (wie in Aufgabe 43).

a) Berechnen Sie für

$$L(x,y,z) \;:=\; \tfrac{1}{2}(rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z-2r)^2)$$

die Ableitung $\partial_v L$, und zeigen Sie, dass

$$A_\delta \;:=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \partial_v L(x,y,z) \geq -\delta\}$$

für $\delta > 0$ ein kompaktes Ellipsoid ist.

b) Es sei $M_\delta := \max\{L(x,y,z) \mid (x,y,z) \in A_\delta\}$ und

$$E_\delta \;:=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid L(x,y,z) \leq M_\delta\}\,.$$

Zeigen Sie für eine Lösung φ^ξ des Lorenz-Systems die Existenz von $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $\varphi^\xi(t) \in E_\delta$ für $t \geq t_0$. Schließen Sie, dass $t^+(\xi) = \infty$ ist und E_δ die stationären Punkte enthält.

c) Berechnen Sie $\operatorname{div} v(x,y,z)$. Berechnen Sie anschließend für den Lorenz-Fluss φ und $t \geq 0$ das Volumen $\varphi_t(M)$ für eine messbare Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

d) Zeigen Sie, dass $\varphi_t(E_\delta) \subseteq E_\delta$ für $t \geq 0$ gilt. Die Menge

$$E_\infty \;:=\; \bigcap_{t\geq 0} \bigcup_{s \geq t} \varphi_s(E_\delta) \;=\; \bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(E_\delta)$$

heißt *Lorenz-Attraktor*. Zeigen Sie, dass E_∞ eine kompakte, zusammenhängende Nullmenge mit $\varphi_t(E_\infty) \subseteq E_\infty$ für $t \geq 0$ ist, die die stationären Punkte enthält.