Musterlösung zu Blatt 12

Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sommersemester 2008

44 Nach Satz 2.4 lässt sich φ mit Hilfe der Funktionen F und G als $\varphi = G^{-1} \circ F$ darstellen. Es gilt also $G \circ \varphi = F$, und Ableiten beider Seiten liefert die gesuchten Ableitungen. Berechne zunächt die partielle Ableitung von φ nach a. Mit

$$\frac{\partial}{\partial a}(G \circ \varphi)(t,a,\xi) \;=\; \frac{\partial}{\partial a}\int_{\xi}^{\varphi(t,a,\xi)} \frac{d\rho}{g(\rho)} \;=\; \frac{\frac{\partial}{\partial a}\varphi(t,a,\xi)}{g(\varphi(t,a,\xi))}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial a}F(t,a,\xi) \;=\; \frac{\partial}{\partial a}\int_a^t f(\tau)\,d\tau \;=\; -f(a)$$

folgt:

$$\frac{\partial}{\partial a}\varphi(t,a,\xi) \;=\; -f(a)\cdot g(\varphi(t,a,\xi))$$

Entsprechend für die partielle Ableitung von φ nach ξ. Mit

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(G \circ \varphi)(t,a,\xi) \;=\; \frac{\partial}{\partial \xi}\int_{\xi}^{\varphi(t,a,\xi)} \frac{d\rho}{g(\rho)} \;=\; \frac{\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi(t,a,\xi)}{g(\varphi(t,a,\xi))} - \frac{1}{g(\xi)}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \xi}F(t,a,\xi) \;=\; \frac{\partial}{\partial \xi}\int_a^t f(\tau)\,d\tau \;=\; 0$$

folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi(t,a,\xi) \;=\; \frac{g(\varphi(t,a,\xi))}{g(\xi)}$$

45 a) Es ist

$$\partial_v L(x,y,z) \;=\; \langle \operatorname{grad} L(x,y,z), v(x,y,z)\rangle \;=\; -\sigma(rx^2+y^2+b(z-r)^2)+\sigma b r^2\,,$$

und

$$A_\delta \;=\; \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^n \mid rx^2+y^2+b(z-r)^2 \le br^2+\tfrac{\delta}{\sigma}\right\}$$

offensichtlich ein kompaktes Ellipsoid.

b) E_δ ist ein Ellipsoid mit $A_\delta \subseteq E_\delta$. Ist $\varphi^\xi : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ eine maximale Lösung des Lorenz-Systems und $t_1 \in (a,b)$ mit $\varphi^\xi(t_1) \notin A_\delta$, so hat die Funktion $L \circ \varphi^\xi$ in t_1 eine Ableitung, die kleiner als $-\delta$ ist. Dann liegt $\varphi(t)$ spätestens zum Zeitpunkt $t_1 + \delta^{-1}L(\varphi^\xi(t_1))$ in A_δ, denn andernfalls wären die Funktionswerte stets kleiner als die der Geraden $t \mapsto L(\varphi^\xi(t_1)) - \delta(t-t_1)$, was zum Widerspruch zu $L \circ \varphi^\xi \ge 0$ führt. Also existiert $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $\varphi^\xi(t_0) \in A_\delta \subseteq E_\delta$.

Hat φ^ξ einmal E_δ erreicht, so bleibt die Lösung dort. Andernfalls gäbe es $t_1 < t_2$ mit $L(\varphi^\xi(t_1)) = M_\delta$ und $L(\varphi^\xi(t)) > M_\delta$ für alle t mit $t_1 < t < t_2$. Dann folgt zum einen $\frac{d}{dt}(L\circ\varphi^\xi)(t_1) \ge 0$. Zum anderen ist $\varphi^\xi(t_1)$ sicherlich kein innerer Punkt von A_δ und somit $\frac{d}{dt}(L\circ\varphi^\xi)(t_1) \le -\delta < 0$, was einen Widerspruch ergibt.

Es folgt, dass $t^+(\xi) = \infty$ ist (Satz 3.4 bzw. 3.7) und E_δ die stationären Punkte enthält.

Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass die maximalen Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

c) Nach 15.9 lässt sich das Volumen von $\varphi_t(M)$ mit der Formel

$$m_3(\varphi_t(M)) \;=\; \int_M J_t(\xi)\, d^3\xi$$

berechnen. Die Jacobideterminante $J_t(\xi) = J^\xi(t)$ erfüllt das AWP

$$\dot{W}(t) \;=\; \operatorname{div} v(\varphi^\xi(t))\, W(t)\,, \quad W(0) \;=\; 1\,.$$

Da für das Lorenz-System

$$\operatorname{div} v(x,y,z) \;=\; -(\sigma+1+b)$$

konstant ist, hängt

$$J_t(\xi) \;=\; e^{-(\sigma+1+b)t}$$

nicht von ξ ab, und es folgt

$$m_3(\varphi_t(M)) \;=\; m_3(M)e^{-(\sigma+1+b)t}$$

für alle $t \geq 0$.

d) Wie in Teil b) gezeigt, verlässt eine Lösung, die in E_δ startet, diese Menge nicht mehr, und es folgt unmittelbar $\varphi_t(E_\delta) \subseteq E_\delta$ für alle $t \geq 0$. Wegen $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ (siehe 15.2) folgt allgemeiner $\varphi_s(E_\delta) \subseteq \varphi_t(E_\delta)$ für $s \geq t$ und damit die Identität

$$E_\infty \;:=\; \bigcap_{t\geq 0} \bigcup_{s\geq t} \varphi_s(E_\delta) \;=\; \bigcap_{t\geq 0} \varphi_t(E_\delta)$$

für den Lorenz-Attraktor E_∞.

Der Lorenz-Attraktor ist als Schnitt der kompakten Mengen $\varphi_t(E_\delta)$ kompakt und nach Teil c) eine Nullmenge, die nach Teil b) die stationären Punkte enthält.

Es bleibt noch zu zeigen, dass E_∞ zusammenhängend ist. Natürlich ist $\varphi_t(E_\delta)$ für jedes $t \geq 0$ zusammenhängend.

Annahme: E_∞ nicht zusammenhängend

Dann ist $E_\infty = A_1 \cup A_2$ mit disjunkten, nicht leeren, abgeschlossenen Mengen A_1 und A_2. Als abgeschlossene Teilmengen von E_∞ sind A_1 und A_2 beide auch kompakt. Daher existieren disjunkte, offene Umgebungen U_j von A_j für $j = 1, 2$. Wegen

$$E_\infty \;=\; \bigcap_{t\geq 0} \varphi_t(E_\delta) \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \varphi_{\frac{1}{n}}(E_\delta)$$

gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\varphi_{\frac{1}{n}}(E_\delta) \;\subseteq\; U_1 \cup U_2$$

gilt, d.h. $\varphi_{\frac{1}{n}}(E_\delta)$ ist nicht zusammenhängend. **Widerspruch!**

Also ist E_∞ zusammenhängend.

sawo