Blatt 3 vom 22.04.08

(Abgabe am 29.04 bzw. 30.04 in den Übungen)

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie algebraisch:

1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

b) Zeigen Sie durch ein kombinatorisches Argument:

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

Aufgabe 2:

Wie viele Wörte der Länge 10 und wie viele der Länge 11 kann man aus den Buchstaben des Wortes ABRAKADABRA bilden?

Aufgabe 3:

Bei einem Tunier spielen n Mannschaften "jeder gegen jeden". Für einen Sieg gibt es 3 Punkte, für ein Unentschieden 1 Punkt. Die Platzierungen ergeben sich aus den erzielten Punkten, bei Punktegleichheit wird gelost. Wie viele Punkte hat der Gruppensieger mindestens, wie viele Punkte hat der Gruppenzweite mindestens?

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass jede Folge $a = (a_1, \ldots, a_{n^2+1})$ von $n^2 + 1$ reellen Zahlen mit $n \geq 1$ eine Teilfolge der Länge $n + 1$ besitzt, die monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel die endliche Folge $a = (2, 5, 10, 3, 1, 9, 8, 7, 1, 3)$ mit $n = 3$. Für ein Folgenglied a_i sei $f(a_i)$ die grösste Zahl k, für die a eine monoton wachsende Teilfolge der Länge k besitzt, die mit a_i beginnt.

b) Zeigen Sie, dass die Aussage für n^2 Zahlen nicht mehr richtig ist, d.h. $n^2 + 1$ ist bestmöglich.