Blatt 6 vom 14.05.08

(Abgabe am 20.05 bzw. 21.05 in den Übungen)

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie für beliebiges $r \in \mathbb{N}_0$ die Formel

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

durch Induktion über n und alternativ durch einen kombinatorischen Beweis.

b) Benutzen Sie diese Formel zur Herleitung einer vereinfachten (summenfreien) Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \frac{1}{k} \quad .$$

Aufgabe 2:

Eine Funktion $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ heißt monoton, wenn $i < j$ auch $f(i) \leq f(j)$ impliziert. Wie viele monotone Funktionen gibt es?

Aufgabe 3:

Beweisen Sie den *Satz von de Moivre* mit Induktion:

$$(\cos\alpha + i\ \sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\ \sin(n\alpha)\ .$$

Dabei ist i die imaginäre Einheit.

Aufgabe 4: Zählen Sie die Teilmengen einer n-elementigen Menge, deren Mächtigkeit ein Vielfaches von 4 ist (der Relativsatz bezieht sich natürlich auf die Teilmengen).

Hinweis: Verwenden Sie den Binomialsatz und alternativ die Formel von de Moivre zur Berechnung des Ausdrucks

$$(1+1)^n + (1-1)^n + (1+i)^n + (1-i)^n$$