Diskrete Mathematik — Übungen

Prof. Dr. Frank Lutz — SS 2008

Blatt 12 vom 25.06.08

(Abgabe am 2.07 in den Übungen)

Aufgabe 1:

Aus der Menge der $\{a_1, a_2, a_3\}$ kann a_1 nur in gerader Anzahl, a_2 beliebig oft und a_3 höchstens einmal ausgewählt werden.

Bestimmen Sie die Anzahl f_k der möglichen Auswahlen von k Elementen.

Aufgabe 2:

Wie viele verschiedene Wörter mit 3 Buchstaben kann man aus der Multimenge $\{A, A, B, B, C\}$ bilden?

Aufgabe 3:

Sei C_n die Anzahl der endlichen Folgen $x_1, \ldots, x_{2n}$ mit $x_i \in \{-1, 1\}$ für $i = 1, \ldots, 2n$, so dass

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{k} x_i \geq 0 \qquad \text{für } k = 1, \ldots, 2n$$

Zeigen SIe, dass C_n die n-te Catalan-Zahl ist. Weisen Sie hierzu nach, dass für die Koeffizienten C_n die Catalan-Rekursion

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k \, C_{n-k} \qquad \text{für } n \geq 0$$

gilt.

Aufgabe 4:

Sei C_n die Anzahl der monotonen Gitterwege (von links unten nach rechts oben) im $n \times n$ - Gitter, die nie oberhalb der Diagonale gehen.

Zeigen Sie, dass C_n die n-te Catalan-Zahl ist. Gehen Sie hierzu vor, wie in Aufgabe 3.