

Funktionentheorie I

1. Übungsblatt, Sommersemester 2008

Aufgabe 1

Berechnen Sie $\int_{\gamma} |z|^2 dz$ und $\int_{\gamma} \bar{z} dz$. Dabei sei γ

- die geradlinige Verbindungsstrecke von -1 nach 1 ,
- der Halbkreisbogen von -1 nach 1 durch i ,
- der Polygonzug von -1 nach i und von i nach 1 .

Aufgabe 2

Es sei $T(z) := \frac{z-i}{z+1}$. Wohin werden der Einheitskreis $\partial\mathbb{D}$, die reelle Achse, die imaginäre Achse, die obere Halbebene, die rechte Halbebene und das Quadrat mit den Eckpunkten $0, 2, 2+2i$ und $2i$ von T abgebildet?

Aufgabe 3

Es sei $\sigma : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ die stereographische Projektion. Zeigen Sie:

- $\zeta, \eta \in S^2 \setminus \{N\}$ sind genau dann Antipodenpunkte, wenn $\sigma(\zeta) \cdot \overline{\sigma(\eta)} = -1$ ist.
- Die Bilder von Kreisen auf S^2 unter σ sind Kreise oder Geraden in \mathbb{C} .

Hinweis zu b): Zeigen Sie zunächst, dass Kreise auf S^2 Schnitte von Ebenen mit S^2 sind.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

- $z^5 = \bar{z}$
- $(z+1)^6 = (z-1)^6$