

## Funktionentheorie I

### 3. Übungsblatt, Sommersemester 2008

#### Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a) } \int_{|z-2i|=2} \frac{e^{\frac{\pi}{4}z}}{(iz+1)(z-1)^2} dz \quad \text{b) } \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2} \quad \text{c) } \int_{|2z-2|=1} \left( \frac{z}{z-1} \right)^n dz, n \in \mathbb{N}$$

#### Aufgabe 2

Es seien  $f, g$  ganze Funktionen. Zeigen Sie:

- a) Gibt es ein  $c > 0$  und ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \geq 1$  gilt:  $|f(z)| \leq c|z|^n$ , so ist  $f$  ein Polynom vom Grad höchstens  $n$ .
- b) Ist  $\operatorname{Re} f > 0$ , so ist  $f$  konstant.
- c) Gilt  $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$  für  $z \in \mathbb{C}$ , so ist  $f$  konstant.
- d) Gilt  $|f(z)| \leq |g(z)|$  für  $z \in \mathbb{C}$ , so gilt  $f = cg$  mit einem  $c \in \mathbb{C}$ .

#### Aufgabe 3

- a) Es sei  $f$  holomorph in  $\mathbb{D}$  mit  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  und  $f(z) \neq 0$  in  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ . Weiter sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie: Es gibt genau eine in  $\mathbb{D}$  holomorphe Funktion  $g$  mit  $f(z^n) = (g(z))^n$  und  $g'(0) = 1$ .
- b) Es sei nun  $f(z) = k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$  die Koebe-funktion und  $g$  die zugehörige Funktion aus a). Bestimmen Sie das Bildgebiet  $g(\mathbb{D})$ .

#### Aufgabe 4

Bestimmen und klassifizieren Sie die Singularitäten von

$$\text{a) } f(z) = \frac{z}{\sin z} \quad \text{b) } f(z) = \frac{1}{e^z + e^{1/z}}$$