TU Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 29. April 2008

Funktionentheorie I

5. Übungsblatt, Sommersemester 2008

Aufgabe 1
Untersuchen Sie, ob die Funktion u im Gebiet D harmonisch ist und bestimmen Sie gegebenenfalls eine konjugiert harmonische Funktion:

a) $u(x+iy) = e^y \cos x$ in $D = \mathbb{C}$

b) $u(z) = \log |z|^2$ in $D = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$

c) $u(z) = \log |z|^2$ in $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |e^{it} - a|\, dt$ für $|a| \neq 1$.

Aufgabe 3
Es seien $D, G, G^* \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete mit $G^* \subseteq G$ und $f : D \to G$ eine eigentliche Abbildung.
Weiter sei D^* eine Zusammenhangskomponente von $f^{-1}(G^*)$.
Zeigen Sie, dass $f : D^* \to G^*$ eine eigentliche Abbildung ist.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Abbildungen sind eigentlich?

a) $f : \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = z^2$

b) $f : \mathbb{C} \setminus [-2, 2] \to \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$, $f(z) = z^2 - 2$

c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = e^z$

d) $J : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $J(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$