

Funktionentheorie I

7. Übungsblatt, Sommersemester 2008

Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit dem Satz von Rouché die Anzahl der Nullstellen von

- a) $e^z \cos z + 9z^3$ in \mathbb{D} ,
- b) $z^4 + 12z^2 + 15z + 1$ in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$,
- c) $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ in \mathbb{C} ($n \geq 1$)

Aufgabe 2

Es seien $0 < |\lambda| < 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Weiter sei $f(z) := (z - 1)^n e^z - \lambda$. Zeigen Sie:

- a) f hat in $\{z : |z - 1| < 1\}$ genau n Nullstellen.
- b) f hat in $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ keine weiteren Nullstellen.
- c) Die Nullstellen von f in $\{z : |z - 1| < 1\}$ sind jeweils einfache Nullstellen.

Aufgabe 3

Berechnen Sie mit dem Residuensatz:

a) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3 + 1} dx$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1 + x^2)^2} dx$

c) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3 \cos \theta} d\theta$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass $f : \left\{ z : |\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\} \rightarrow \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $f(z) = \sin z$, eine konforme Abbildung ist.