TU Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 27. Mai 2008

Funktionentheorie I

8. Übungsblatt, Sommersemester 2008

Aufgabe 1

Berechnen Sie den Wert der Reihen

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ und b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(nz)$ in einem Parallelstreifen $\{z\ :\ |\mathrm{Im}\ z| < h\}$ ($h > 0$ geeignet) lokal gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden Familien auf Normalität:

a) $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ :\ f \text{ ist Polynom vom Grad } \le 2\}$

b) $\mathcal{F} = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\ :\ f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,\ |a_n| \le n^4 \right\}$

c) $\mathcal{F} = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\ :\ |f(0)| \le 1,\ |f'(z)| \le \dfrac{1}{1-|z|^2} \right\}$

d) $\mathcal{P} = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\ :\ f(0) = 1,\ \mathrm{Re}\, f(z) > 0\}$

Aufgabe 4

Es sei f holomorph in $\mathbb{D}$ und die Familie $\mathcal{F} = \left\{ f^{(n)} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\ :\ n \in \mathbb{N} \right\}$ sei normal. Zeigen Sie, dass f eine ganze Funktion ist und es Konstanten c, a gibt mit $|f(z)| \le c e^{a|z|}$ für $z \in \mathbb{C}$.