TU Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 4. Juni 2008

Funktionentheorie I

9. Übungsblatt, Sommersemester 2008

Aufgabe 1

Konstruieren Sie eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion, die

a) einfache Pole bei $z = -n$ mit Residuum $\underset{-n}{Res}(f) = n$

b) doppelte Pole bei $z = n$ mit Hauptteil $h_n(z) = \dfrac{n}{(z-n)^2}$

hat für $n \in \mathbb{N}$ und sonst holomorph ist.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Mittag-Leffler-Reihe (Partialbruchreihe) der in $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion $f(z) = \dfrac{\pi^2}{\sin(\pi z)\,\sinh(\pi z)}$.

Aufgabe 3

Es seien $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und es seien $\sum\limits_0^\infty a_n$ und $\sum\limits_0^\infty |a_n|^2$ konvergent. Zeigen Sie, dass dann das Produkt $\prod\limits_{n=0}^\infty (1 + a_n)$ konvergiert. Kann man auf die zweite Voraussetzung verzichten?

Aufgabe 4

a) Drücken Sie $\prod\limits_{n=2}^\infty \left(1 - \dfrac{z^4}{n^4}\right)$ durch elementare Funktionen aus und berechnen Sie damit $\prod\limits_{n=2}^\infty \left(1 - \dfrac{1}{n^4}\right)$.

b) Zeigen Sie, dass die Produktdarstellung $e^z - 1 = z\,e^z \prod\limits_{n=1}^\infty \left(1 + \dfrac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right)$ gilt.