Funktionentheorie I

13. Übungsblatt, Sommersemester 2008

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen zur Klasse S gehören. Bestimmen Sie für $f \in S$ auch $f(\mathbb{D})$.

a) $f(z) = \frac{z}{1-z}$

b) $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$

c) $f(z) = \frac{z}{1+iz}$

d) $f(z) = \frac{z}{1-z} + \frac{z}{1+iz}$

e) $f(z) = z(1+3z)$

f) $f(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$

Aufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Ist $f \in S$ mit $f(z) \neq w$ und $g(z) = \frac{wf(z)}{w-f(z)}$, so ist $g \in S$.

b) Ist $f \in S$, $|a| < 1$ und $g(z) = \frac{f\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - f(a)}{(1-|a|^2)f'(a)}$, so ist $g \in S$.

Aufgabe 3

Es sei $f \in S$ mit $f(z) \neq a$ und $f(z) \neq -a$ für $z \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie, dass dann $|a| \geq \frac{1}{2}$ gilt. Untersuchen Sie auch, wann Gleichheit gilt.

Aufgabe 4

Es sei $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots \in S$. Zeigen Sie, dass $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ und bestimmen Sie alle Funktionen in S , für die diese Abschätzung scharf ist.