Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Di, 15.04.2008, 12h

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-i & 1-i \\ 1-i & 1+2i & 1-i \\ 1-i & 1-i & 1+2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(3,3)}$$

und deren zugehörige Eigenräume.

Aufgabe 2:

Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

dem Polynom $(-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)$ entspricht.

Aufgabe 3:

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{(n,n)}$. Die Zahl $\mathrm{Spur}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ heißt die *Spur* der Matrix A.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{Spur} : K^{(n,n)} \to K$, $A \mapsto \mathrm{Spur}(A)$ K-linear ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
   i) Es gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(A) \cdot \mathrm{Spur}(B)$ für alle $A, B \in K^{(n,n)}$.
   ii) Es gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ für alle $A, B \in K^{(n,n)}$.
   iii) Es gilt $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(BAB^{-1})$ für alle $A \in K^{(n,n)}$ und $B \in \mathrm{GL}_n(K)$.
   iv) Es ist $\mathrm{Spur}(A) \neq 0$ für alle $A \in \mathrm{GL}_n(K)$.
   v) Es gilt $\mathrm{Spur}(A^{-1}) = \mathrm{Spur}(A)^{-1}$ für alle $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $\mathrm{Spur}(A) \neq 0$.

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Weiter sei $\mathcal{L}(V)$ die Menge aller Endomorphismen von V und $L \in \mathcal{L}(V)$. Zeigen Sie:

a) Es existiert genau ein $s \in K$, so dass für alle $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ und alle Determinantenformen $D : V^n \to K$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} D(v_1, \dots, v_{i-1}, L(v_i), v_{i+1}, \dots, v_n) = s \cdot D(v_1, \dots, v_n).$$

   Die Zahl s heißt die *Spur* von L und wird mit $\mathrm{Spur}(L)$ bezeichnet.

b) Ist $A \in K^{(n,n)}$ die Darstellungsmatrix von L bzgl. einer Basis von V, so ist $\mathrm{Spur}(L)$ gerade die Spur von A.

c) Die Abbildung $L \mapsto \mathrm{Spur}(L)$ ist eine Linearform auf $\mathcal{L}(V)$.

d) Es gilt $\mathrm{Spur}(L_1 \circ L_2) = \mathrm{Spur}(L_2 \circ L_1)$ für alle $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$.