Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Di, 22.04.2008, 12h

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Übungsblatt 2

Aufgabe 1:
Zeigen Sie:

a) Die Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ besitzen genau eine Anordnung.
b) Der Körper $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden.
c) Die Menge $P = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a - b\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+\}$ ist eine Ordnung von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Besitzt der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für jedes $d \in \mathbb{Z}$ eine Anordnung?

Aufgabe 2:
Seien K und K' Körper. Eine Abbildung $\varphi : K \to K'$ heißt *Körperhomomorphismus*, wenn für alle $a, b \in K$ gilt $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$. Ist $K = K'$ und φ bijektiv, so heißt φ *Körperautomorphismus* von K.

Sei nun $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper und φ ein Körperautomorphismus von K. Zeigen Sie, dass dann die Relation $\leq'$ mit

$$a \leq' b \quad :\Leftrightarrow \quad \varphi(a) \leq \varphi(b)$$

für alle $a, b \in K$ wieder eine Anordnung von K ist.

Aufgabe 3:
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller (beschränkt) integrierbaren Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a, b]$. Weiter sei die Abbildung F definiert durch

$$F : V \times V \to \mathbb{R},\ (f, g) \mapsto \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

a) Zeigen Sie, dass F eine symmetrische Bilinearform auf V ist.
b) Entscheiden Sie, ob F auf dem $\mathbb{R}$-Untervektorraum $C[a, b] \subset V$ aller stetigen Funktionen auf $[a, b]$ positiv definit ist.

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $F : K^{(n,n)} \times K^{(n,n)} \to K$ definiert durch $F(A, B) = \mathrm{Spur}(AB)$.
Zeigen Sie:

a) F ist eine symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform auf $K^{(n,n)}$.
b) Die Menge $\mathrm{Sym}_n \subset K^{(n,n)}$ aller symmetrischen $n \times n$ – Matrizen bildet einen Untervektorraum von $K^{(n,n)}$.
c) Ist K angeordnet, so ist die Einschränkung von F auf Sym_n positiv definit.