Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Di, 29.04.2008, 12h

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -7 \\ 1 & -7 & -17 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie reguläre Matrizen $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^{(3,3)}$, so dass $S_1^T A_1 S_1$ bzw. $S_2^T A_2 S_2$ die Diagonalgestalt $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$ hat.

Aufgabe 2:

Auf $V = \mathbb{F}_{11}^4$ sei die quadratische Form Q gegeben durch

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 + 5x_3x_4.$$

a) Geben Sie die Formmatrix von Q bzgl. der Standardbasis von V an.

b) Bestimmen Sie eine Polarbasis von V (bzgl. der zugehörigen Bilinearform) und die Formmatrix von Q bzgl. dieser Basis.

Aufgabe 3:

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{B}(V)$ die Menge aller Bilinearformen auf V. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(V)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(V)^2$ ist.

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper mit $\operatorname{Char}(K) \neq 2$, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und F eine Bilinearform auf V. Zeigen Sie:

a) Ist F symmetrisch, so ist F genau dann nicht ausgeartet, wenn die zugehörige Formmatrix bzgl. jeder Basis von V regulär ist.

b) Ist F alternierend und die zugehörige Formmatrix regulär, so ist $\dim_K(V)$ eine gerade Zahl.

c) F lässt sich in eindeutiger Weise als Summe einer symmetrischen und einer alternierenden Bilinearform darstellen.