Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Di, 06.05.2008, 12h

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

Sei $V = \mathbb{R}^{(2,2)}$ und $F : V \times V \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB)$ die symmetrische Bilinearform aus Aufgabe 4, Blatt 2. Bestimmen Sie den Trägheitsindex und die Signatur von F.

Aufgabe 2:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ die Menge aller symmetrischen $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$. Wir betrachten auf $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ die Relation $A \sim B :\Leftrightarrow A$ ist kongruent zu B.

a) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie für die Äquivalenzklassen möglichst einfache Repräsentanten an.

b) Zeigen Sie, dass der Rang und die Dimension des Radikals ein vollständiges Invariantensystem für die Kongruenz der Matrizen in $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ bilden.

Aufgabe 3:

Sei $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, F eine symmetrische Bilinearform auf V und A die Formmatrix von F bzgl. einer Basis von V. Zeigen Sie:

a) Es ist F genau dann positiv definit, wenn eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ existiert mit $A = SS^T$.

b) Es ist F genau dann positiv semidefinit, wenn eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ existiert mit $A = SS^T$.

Aufgabe 4:

Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für Vektoren $u, v, w \in V$ die *Ptolemäische Ungleichung*

$$|u - v| \cdot |w| \leq |v - w| \cdot |u| + |w - u| \cdot |v|$$

erfüllt ist.