Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Di, 13.05.2008, 12h

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und seien U_1, U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

a) Die Zuordnung $U \mapsto U^\perp$ ist eine bijektive Abbildung auf der Menge aller Untervektorräume von V.

b) Es gilt $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

c) Es gilt $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

d) Aus $U_1 < U_2$ folgt $U_2^\perp < U_1^\perp$.

Aufgabe 2:

Sei V die Menge der reellen Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{i=1}^\infty a_i^2 < \infty$.

a) Zeigen Sie, dass V mit argumentweiser Addition und skalarer Multiplikation zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum wird.
[Hinweis: Sie dürfen $\left(\sum_{i=1}^\infty a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^\infty a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^\infty b_i^2$ für $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in V$ verwenden.]

b) Zeigen Sie, dass durch $\langle (a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle := \sum_{i=1}^\infty a_i b_i$ ein Skalarprodukt auf V definiert ist.

c) Sei $e_j = (\delta_{ij})_{i\in\mathbb{N}}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Familie $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem von V bildet.

d) Bestimmen Sie für $U = \mathrm{sp}(\{e_j \mid j \in \mathbb{N}\})$ die Untervektorräume $U^\perp$ und $(U^\perp)^\perp$.

Aufgabe 3:

Sei die symmetrische Bilinearform $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

a) Zeigen Sie, dass F ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bzgl. F ausgehend von der Standardbasis.

Aufgabe 4:

Sei $V = C[0, 1]$ der euklidische Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $U = \mathrm{sp}(f_1, f_2, f_3) \subset C[0, 1]$, wobei $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k$ für $k = 1, 2, 3$.