Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Di, 27.05.2008, 12h

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Übungsblatt 7

Aufgabe 1:

Sei $V = \mathbb{R}^2$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle x, y\rangle_k := x^T \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right) y$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei die Gerade $G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 2\}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von G in Abhängigkeit von k. Für welches k besitzt G den Abstand $\sqrt{2}$ zum Nullpunkt?

b) Für welche $k \in \mathbb{N}$ liegt $v = (1, -1)$ im Orthogonalraum von G.

c) Skizzieren Sie G und $G' = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$ und bestimmen Sie dasjenige k, für das der Winkel zwischen G und G' gerade $\frac{\pi}{4}$ beträgt.

d) Für welches k ist die Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot x$ orthogonal.

Aufgabe 2:

Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $L : V \to V$ heißt *winkeltreu*, wenn L injektiv ist und für alle $u, v \in V$ gilt $\measuredangle(L(u), L(v)) = \measuredangle(u, v)$. Sei nun $L \in \mathcal{L}(V)$. Zeigen Sie:

a) Ist L winkeltreu, so gilt für orthogonale Vektoren $u, v \in V$ mit $|u| = |v|$ stets $|L(u)| = |L(v)|$. [Hinweis: Betrachten Sie $\langle L(u + v), L(u - v)\rangle$.]

b) Ist L winkeltreu und $u \in V$ mit $|u| = 1$, so gilt $|L(v)| = |L(u)| \cdot |v|$ für alle $v \in V$.

c) L ist genau dann winkeltreu, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und ein $L' \in O(V)$ gibt, so dass gilt $L = \lambda \cdot L'$. Ist die letzte Darstellung von L eindeutig?

Aufgabe 3:

Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{W}(V)$ die Menge aller winkeltreuen Abbildungen auf V.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{W}(V)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $O(V)$ und die Menge aller Streckungen auf V Normalteiler von $\mathcal{W}(V)$ sind.

c) Bestimmen Sie alle Streckungen auf V, die zugleich orthogonal sind.

Aufgabe 4:

Seien V und W euklidische Vektorräume. Zeigen Sie:

a) Ist $a_1, \ldots, a_n$ eine Orthonormalbasis von V und $b_1, \ldots, b_n$ eine Orthonormalbasis von W, so existiert genau eine orthogonale Abbildung $L : V \to W$ mit $L(a_i) = b_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

b) Jede Abbildung $L : V \to W$, die für alle $u, v \in V$ die Bedingung $\langle L(u), L(v)\rangle_W = \langle u, v\rangle_V$ erfüllt, ist bereits orthogonal.