Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Di, 03.06.2008, 12h

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Übungsblatt 8

Aufgabe 1:

Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi : V \to V$ heißt *Bewegung*, wenn für alle $u, v \in V$ gilt $d(\varphi(u), \varphi(v)) = d(u, v)$.

Zeigen Sie:

a) Für jedes $w \in V$ ist die Translation $T_w : V \to V$, $v \mapsto v + w$ eine Bewegung.

b) Für jede orthogonale Abbildung $L \in O(V)$ und jedes $w \in V$ ist $T_w \circ L$ eine Bewegung.

c) Jede Bewegung φ von V mit $\varphi(0) = 0$ ist linear.

d) Zu jeder Bewegung φ von V existiert ein $L \in O(V)$ und ein $w \in V$, so dass gilt $\varphi = T_w \circ L$. Ist diese Darstellung eindeutig?

Aufgabe 2:

Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum, Γ die Menge aller Bewegungen von V und T die Menge aller Translationen von V. Zeigen Sie:

a) Γ ist eine Gruppe mit Untergruppe $O(V)$.

b) T ist ein Normalteiler von Γ und es gilt $\Gamma/T \cong O(V)$.

c) Gibt es einen Gruppenhomomorphismus $\psi : \Gamma \to O(V)$ mit $\mathrm{Kern}(\psi) = T$? Wenn ja, geben sie diesen an.

Aufgabe 3:

Seien die Polynome $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{F}_{11}[X]$ gegeben durch

$$f_1 = X^4 + 5X^3 + 3X^2 + 6X + 7, \quad f_2 = X^3 + 6X^2 + 6, \quad f_3 = X + 1.$$

a) Zeigen Sie, dass f_3 ein Teiler von f_1 und f_2 ist.

b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f_1 und f_2.

c) Geben Sie zwei Polynome $g_1, g_2 \in \mathbb{F}_{11}[X]$ an, so dass gilt $f_3 = g_1 f_1 + g_2 f_2$.

Aufgabe 4:

Seien die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -12 \\ -3 & -2 & -6 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Geben Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ an, so dass die Matrix $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt besitzt.

b) Entscheiden Sie, ob B diagonalisierbar ist.

c) Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.