

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Übungsblatt 11

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die reelle Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,4)}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und eine zugehörige Jordanbasis.

Aufgabe 2:

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $L : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom über K in Linearfaktoren zerfällt. Für jeden Eigenwert λ von L bezeichne d_λ die geometrische und d'_λ die algebraische Vielfachheit sowie f_λ den Index von λ .

Zeigen Sie:

- Es gilt $d_\lambda \leq d'_\lambda$ für jeden Eigenwert λ von L . Dabei gilt genau dann Gleichheit, wenn $L|_{E'(\lambda)}$ diagonalisierbar ist.
- Es gilt $f_\lambda \leq d'_\lambda$ für jeden Eigenwert λ von L . Dabei gilt genau dann Gleichheit, wenn $E'(\lambda)$ irreduzibel ist.

Aufgabe 3:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $J(n, \lambda) \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ der elementare Jordanblock der Größe n .

Zeigen Sie:

- Die Matrizen $J(n, \lambda)$ und $J(n, \lambda)^T$ sind ähnlich. Geben Sie dazu eine Matrix $S \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ an, für die $J(n, \lambda)^T = S^{-1}J(n, \lambda)S$ gilt.
- Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ ist ähnlich zu ihrer Transponierten A^T .

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $L : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom über K in Linearfaktoren zerfällt.

Zeigen Sie:

- Es existiert eine Darstellung $L = P + T$ von L , wobei P ein diagonalisierbarer und T ein nilpotenter Endomorphismus ist mit $P \circ T = T \circ P$.
- Ist $L = P + T$ eine Darstellung von L wie in a), so stimmen die Eigenwerte von L und P überein und es gilt

$$E'(L, \lambda) = E(P, \lambda)$$

für jeden Eigenwert λ von L .

- Zeigen Sie, dass die Darstellung von L in a) eindeutig ist.