Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Di, 01.07.2008, 12h

# Lineare Algebra und analytische Geometrie II

## Übungsblatt 12

**Aufgabe 1:**

Sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass der zu $A$ gehörige Endomorphismus $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ normal ist.

b) Berechnen Sie die Normalform von $L_A$ und geben Sie die zugehörige Basis an.

**Aufgabe 2:**

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V)$.
Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $\varphi : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)$, $L \mapsto L^*$ ist ein Isomorphismus.

b) Ist $L$ ein Isomorphismus, so auch $L^*$ und es gilt $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$.

c) $\mathrm{Bild}(L)$ und $\mathrm{Kern}(L^*)$ bilden eine orthogonale Zerlegung von $V$.

**Aufgabe 3:**

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V)$ normal.
Zeigen Sie:

a) Es gilt $\mathrm{Kern}(L) = \mathrm{Kern}(L^*)$.

b) $\mathrm{Bild}(L)$ und $\mathrm{Kern}(L)$ bilden eine orthogonale Zerlegung von $V$.

c) Für jeden Eigenwert $\lambda$ von $L$ gilt $E(L, \lambda) = E(L^*, \lambda)$.

**Aufgabe 4:**

Sei $V$ ein 3-dimensionaler, euklidischer Vektorraum, $\alpha, \beta, \gamma$ drei von Null verschiedene Linearformen auf $V$ und $A = \mathrm{Kern}(\alpha)$, $B = \mathrm{Kern}(\beta)$, $C = \mathrm{Kern}(\gamma)$. Die Spiegelungen an den Hyperebenen $A$, $B$ und $C$ seien wieder mit $S_A$, $S_B$ bzw. $S_C$ bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) Die Linearformen $\alpha, \beta, \gamma$ sind linear abhängig.

b) Die Unterräume $A$, $B$, $C$ haben eine Gerade gemeinsam.

c) Es existiert eine Hyperebene $D$ von $V$ mit $S_A \circ S_B \circ S_C = S_D$.