

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Übungsblatt 13

Aufgabe 1:

Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum, $a \in V$ mit $|a| = 1$ und $G = a_0 + \text{sp}(a)$ mit $a_0 \in V$ eine Gerade in V . Eine Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ heißt *involutorisch*, wenn $\varphi \neq \text{id}_V$ und $\varphi^2 = \text{id}_V$ gilt. Zeigen Sie:

- Ist H eine Ursprungsgerade, also $0 \in H$, und $L \in O(V)$ eine involutorische Abbildung, die genau die Punkte von H festlässt, so existiert eine Orthonormalbasis von V , bzgl. der die Matrix von L die Gestalt $\text{diag}(-1, \dots, -1, 1)$ besitzt.
- Ist $H = \text{sp}(a)$, so lässt sich der Endomorphismus L aus a) darstellen als

$$S_H : V \rightarrow V, v \mapsto 2\langle v, a \rangle a - v.$$

- Sind φ_1, φ_2 Bewegungen von V , so ist $\varphi_2 \varphi_1 \varphi_2^{-1}$ genau dann involutorisch, wenn φ_1 involutorisch ist.
- Sind φ_1, φ_2 Bewegungen von V , so ist ein Punkt $p \in V$ genau dann *Fixpunkt* von φ_1 , d.h. es gilt $\varphi_1(p) = p$, wenn $\varphi_2(p)$ Fixpunkt von $\varphi_2 \varphi_1 \varphi_2^{-1}$ ist.
- Jede involutorische Bewegung von V , die genau die Punkte der Geraden G festhält, besitzt die Form

$$S_G : V \rightarrow V, v \mapsto 2\langle v, a \rangle a - v + 2(a_0 - \langle a_0, a \rangle a).$$

Aufgabe 2:

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $(\mathcal{P}, \mathcal{G}) = \text{AG}(V, K)$ der affine Raum über V . Weiter seien $G, H \in \mathcal{G}$ zwei Geraden, die sich in genau einem Punkt $p \in \mathcal{P}$ schneiden, und $a, b \in G$, $c, d \in H$ Punkte, so dass p, a, b, c, d paarweise verschieden sind.

Zeigen Sie, dass die Gerade $\overline{a, c}$ genau dann zu $\overline{b, d}$ parallel ist, wenn gilt $\text{TV}(p, a; b) = \text{TV}(p, c; d)$.

Aufgabe 3:

Seien V, W zwei endlich-dimensionale K -Vektorräume, $(\mathcal{P}_1, \mathcal{G}_1) = \text{AG}(V, K)$, $(\mathcal{P}_2, \mathcal{G}_2) = \text{AG}(W, K)$ affine Räume und $\varphi : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

- Ist φ affin, so gilt

$$\varphi(a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k) = \varphi(a_0) + \alpha_1 \varphi'(a_1) + \dots + \alpha_k \varphi'(a_k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_k \in \mathcal{P}_1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$.

- Es ist φ genau dann affin, wenn für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_k \in \mathcal{P}_1$ und $\beta_0, \dots, \beta_k \in K$ mit $\sum_{i=0}^k \beta_i = 1$ gilt

$$\varphi(\beta_0 a_0 + \dots + \beta_k a_k) = \beta_0 \varphi(a_0) + \dots + \beta_k \varphi(a_k).$$

Aufgabe 4:

Sei V ein 2-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $(\mathcal{P}, \mathcal{G}) = \text{AG}(V, K)$ der affine Raum über V . Ein Punktetripel (a_1, a_2, a_3) heißt *Dreieck*, wenn $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{P}$ affin unabhängig sind. Zwei Dreiecke (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) heißen *kongruent*, wenn eine Bewegung $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ existiert mit $\varphi(a_i) = b_i$ für $i = 1, 2, 3$. Zeigen Sie:

- Sind zwei Dreiecke kongruent, so ist die zugehörige Bewegung eindeutig bestimmt.
- Die Dreiecke (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) sind genau dann kongruent, wenn $d(a_1, a_2) = d(b_1, b_2)$, $d(a_1, a_3) = d(b_1, b_3)$ und $\angle(a_2 - a_1, a_3 - a_1) = \angle(b_2 - b_1, b_3 - b_1)$ gilt.
- Die Dreiecke (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) sind genau dann kongruent, wenn $d(a_i, a_j) = d(b_i, b_j)$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i < j$ gilt.