Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Di, 15.07.2008, 12h

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Übungsblatt 14

Aufgabe 1:

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $(\mathcal{P}, \mathcal{G}) = \mathrm{AG}(V, K)$ der affine Raum über V. Eine affine Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ heißt *Dilatation*, wenn $\varphi(G)$ für jede Gerade $G \in \mathcal{G}$ parallel zu G ist.

Sei $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ eine affine Abbildung. Zeigen Sie:

a) φ ist genau dann eine Dilatation, wenn ein $\lambda \in K$ existiert mit $\varphi' = \lambda \cdot id_{\mathcal{P}}$.

b) Ist φ eine Dilatation, so besitzt φ entweder genau einen Fixpunkt oder ist eine Translation.

Aufgabe 2:

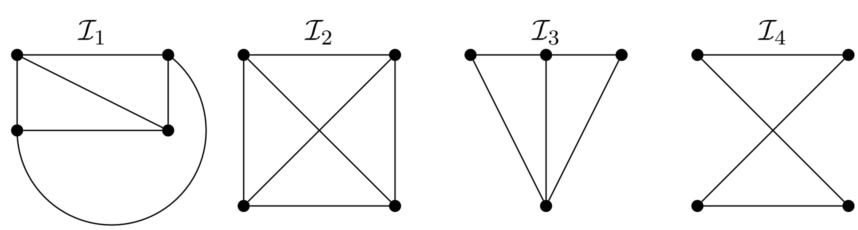
Im affinen Raum $(\mathcal{P}, \mathcal{G}) = \mathrm{AG}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ sei bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Quadrik

$$C_\lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda(x_2 - 1)^2 + \lambda(\lambda - 1)x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 = 0\}$$

gegeben. Bringen Sie C_λ in affine Normalform und geben Sie die zugehörige Affinität $\varphi_\lambda : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ an.

Aufgabe 3:

Seien die folgenden vierpunktigen Räume gegeben



a) Welche der obigen Räume sind als Inzidenzräume isomorph?

b) Geben Sie alle Inzidenzräume mit fünf Punkten an (bis auf Isomorphie).

c) Geben Sie zwei nicht-isomorphe Inzidenzräume mit sechs Punkten und gleicher Geradenanzahl an.

Aufgabe 4:

Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine endliche affine Ebene. Die *Ordnung* von $\mathcal{A}$ ist die Anzahl der mit einer festen Gerade $G \in \mathcal{G}$ inzidierenden Punkte und wird mit $\mathrm{ord}(\mathcal{A})$ bezeichnet.

Zeigen Sie, dass für $n = \mathrm{ord}(\mathcal{A})$ die folgenden Aussagen erfüllt sind:

a) Es ist $|\mathcal{P}| = n^2$.

b) Jeder Punkt $p \in \mathcal{P}$ liegt auf genau $n + 1$ paarweise verschiedenen Geraden.

c) Es ist $|\mathcal{G}| = n^2 + n$.

d) $\mathcal{G}$ besitzt genau $n + 1$ paarweise verschiedene Parallelenbüschel.

e) Jedes Parallelenbüschel enthält genau n Geraden.