Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Mo, 28.04.2008, 12h

Lineare Algebra II
Übungsblatt 2

Aufgabe 1:

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und die Matrix $B_{ij}(a) = (b_{kl})_{1 \le k,l \le n} \in K^{(n,n)}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ und $a \in K$ definiert durch

$$b_{kl} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } k = l \\ a & , \text{ falls } k = i, l = j \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Weiter sei $\varphi : \mathrm{GL}(n, K) \to K^*$ ein Gruppenhomomorphismus und die Abbildung $\alpha : K^* \to \mathrm{GL}(n, K)$ definiert durch $a \mapsto \mathrm{diag}(1, \dots, 1, a)$. Zeigen Sie:

a) Für jede reguläre Matrix $A \in K^{(n,n)}$ existiert eine Darstellung der Form

$$A = \prod_{k=1}^{s} B_{i_k j_k}(a_k) \cdot \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \det(A))$$

mit $i_k, j_k \in \{1, \dots, n\}$, $i_k \neq j_k$ und $a_k \in K^*$ für $k = 1, \dots, s$.

b) Es gilt $\varphi(B_{ij}(a)) = 1$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ und $a \in K$.

c) Es gilt $\det \circ \alpha = id_{K^*}$ und $\varphi = \varphi \circ \alpha \circ \det$.

d) Es existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\psi : K^* \to K^*$ mit $\varphi = \psi \circ \det$.

Aufgabe 2:

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $a_1, \dots, a_n$. Wir betrachten den K-Vektorraum $\mathcal{L}(V)$ aller Endomorphismen von V und für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ dessen Elemente $L_{ij} : V \to V$ mit $L_{ij}(a_k) = \delta_{ik} a_j$ für $k = 1, \dots, n$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $L_{ij} \circ L_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$.

b) Es ist $L_{ij} + id_V \in \mathrm{GL}(V)$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$.

c) Es gilt $\mathcal{L}(V) = \mathrm{sp}(\{L_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\})$.

d) Es gilt $\mathcal{L}(V) = \mathrm{sp}(\mathrm{GL}(V))$.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie:

a) Die Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ besitzen genau eine Anordnung.

b) Der Körper $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden.

c) Die Menge $P = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a - b\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+\}$ ist eine Ordnung von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Besitzt der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für jedes $d \in \mathbb{Z}$ eine Anordnung?

Aufgabe 4:

Seien K und K' Körper. Eine Abbildung $\varphi : K \to K'$ heißt *Körperhomomorphismus*, wenn für alle $a, b \in K$ gilt $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$. Ist $K = K'$ und φ bijektiv, so heißt φ *Körperautomorphismus* von K.

Sei nun $(K, \le)$ ein angeordneter Körper und φ ein Körperautomorphismus von K. Zeigen Sie, dass dann die Relation $\le'$ mit

$$a \le' b \quad :\Leftrightarrow \quad \varphi(a) \le \varphi(b)$$

für alle $a, b \in K$ wieder eine Anordnung von K ist.