Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Mo, 05.05.2008, 12h

Lineare Algebra II
Übungsblatt 3

Definition: Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Bilinearform F auf V heißt *positiv definit*, wenn für alle $v \in V \backslash \{0\}$ gilt $0 < F(v, v)$.

Aufgabe 1:
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller (beschränkt) integrierbaren Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a, b]$. Weiter sei die Abbildung F definiert durch

$$F : V \times V \to \mathbb{R},\ (f, g) \mapsto \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

a) Zeigen Sie, dass F eine symmetrische Bilinearform auf V ist.
b) Entscheiden Sie, ob F auf dem $\mathbb{R}$-Untervektorraum $C[a, b] \subset V$ aller stetigen Funktionen auf $[a, b]$ positiv definit ist.

Aufgabe 2:
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $F : K^{(n,n)} \times K^{(n,n)} \to K$ definiert durch $F(A, B) = \text{Spur}(AB)$.
Zeigen Sie:

a) F ist eine symmetrische Bilinearform auf $K^{(n,n)}$.
b) Die Menge $\text{Sym}_n \subset K^{(n,n)}$ aller symmetrischen $n \times n$ – Matrizen bildet einen Untervektorraum von $K^{(n,n)}$.
c) Ist K angeordnet, so ist die Einschränkung von F auf Sym_n positiv definit.

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in der Unbestimmten X über K (siehe Aufgabe 41, 42 aus Lina 1). Weiter sei $M = \{(f, g) \mid f, g \in K[X],\ g \neq 0\}$ und auf M die Relation $\sim$ definiert durch $(f, g) \sim (f', g') :\Leftrightarrow fg' = f'g$.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.
b) Wir bezeichnen mit $\frac{f}{g}$ die Äquivalenzklasse von $(f, g) \in M$ und mit $K(X)$ die Menge aller Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$. Auf $K(X)$ definieren wir die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch

$$\frac{f}{g} + \frac{f'}{g'} := \frac{fg' + f'g}{gg'} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f}{g} \cdot \frac{f'}{g'} := \frac{ff'}{gg'}.$$

Zeigen Sie, dass $(K(X), +, \cdot)$ ein Körper ist. Er heißt der *Körper der rationalen Funktionen* in X über K.

Aufgabe 4:
Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Eine Ordnung P von K heißt *archimedisch*, falls zu jedem $a \in P$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $a <_P n \cdot 1$. Zeigen Sie:

a) Die Menge $P = \{\frac{f}{g} \cdot (X - 1)^k \mid f, g \in K[X], 0 < f(1) \cdot g(1), k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Ordnung des Körpers $K(X)$.
b) Die Ordnung P aus a) ist nicht archimedisch.