Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Mo, 12.05.2008, 12h

Lineare Algebra II
Übungsblatt 4

Aufgabe 1:
Sei K ein Körper und auf $V = K^3$ die Bilinearformen F_1 und F_2 gegeben mit

$$F_1((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$
$$F_2((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_3 + x_3y_1.$$

Bestimmen Sie:

a) die Radikale $\mathrm{Rad}(F_1)$ und $\mathrm{Rad}(F_2)$,
b) alle bzgl. F_1 isotropen Vektoren für $K = \mathbb{F}_2$,
c) alle bzgl. F_2 isotropen Vektoren für $K = \mathbb{F}_3$,
d) alle bzgl. F_2 zu $e_1 = (1, 0, 0)$ polaren Vektoren für $K = \mathbb{F}_2$.

Aufgabe 2:
Gegeben seien die Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -7 \\ 1 & -7 & -17 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie reguläre Matrizen $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^{(3,3)}$, so dass $S_1^T A_1 S_1$ bzw. $S_2^T A_2 S_2$ die Diagonalgestalt hat. Lässt sich auch die Gestalt $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$ herstellen?

Aufgabe 3:
Auf $V = \mathbb{F}_{11}^4$ sei die quadratische Form Q gegeben durch

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 + 5x_3x_4.$$

a) Geben Sie die Formmatrix von Q bzgl. der Standardbasis von V an.
b) Bestimmen Sie eine *Polarbasis* von V (bzgl. der zugehörigen Bilinearform F_Q), d.h. eine Basis $a_1, \ldots, a_4$ von V mit $F_Q(a_i, a_j) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$ mit $i \neq j$. Geben Sie die Formmatrix von Q bzgl. dieser Basis an.

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper mit $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und F eine Bilinearform auf V. Zeigen Sie:

a) Ist F symmetrisch, so ist F genau dann nicht ausgeartet, wenn die zugehörige Formmatrix bzgl. jeder Basis von V regulär ist.
b) Ist F alternierend und die zugehörige Formmatrix regulär, so ist $\dim_K(V)$ eine gerade Zahl.
c) F lässt sich in eindeutiger Weise als Summe einer symmetrischen und einer alternierenden Bilinearform darstellen.