Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Mo, 19.05.2008, 12h

Lineare Algebra II
Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

Sei $V = \mathbb{R}^{(2,2)}$ und $F : V \times V \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB)$ die symmetrische Bilinearform aus Aufgabe 2, Blatt 3. Bestimmen Sie den Trägheitsindex und die Signatur von F.

Aufgabe 2:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ die Menge aller symmetrischen $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$. Wir betrachten auf $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ die Relation $A \sim B :\Leftrightarrow A$ ist kongruent zu B.

a) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie für die Äquivalenzklassen möglichst einfache Repräsentanten an.

b) Zeigen Sie, dass der Rang und die Dimension des Radikals ein vollständiges Invariantensystem für die Kongruenz der Matrizen in $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ bilden.

Aufgabe 3:

Sei $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, F eine symmetrische Bilinearform auf V und A die Formmatrix von F bzgl. einer Basis von V. Zeigen Sie:

a) Es ist F genau dann positiv definit, wenn eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ existiert mit $A = SS^T$.

b) Es ist F genau dann positiv semidefinit, wenn eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ existiert mit $A = SS^T$.

Aufgabe 4:

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und F eine alternierende, nicht-ausgeartete Bilinearform auf V.

a) Bestimmen Sie alle isotropen Vektoren von V bzgl. F, d.h. alle $v \in V$ mit $F(v, v) = 0$.

b) Zeigen Sie, dass es eine Basis $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in V$ gibt, so dass $F(a_i, a_j) = F(b_i, b_j) = 0$ und $F(a_i, b_j) = \delta_{ij}$ gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Geben Sie die Formmatrix von F bzgl. einer solchen Basis an.