Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Mo, 26.05.2008, 12h

Lineare Algebra II
Übungsblatt 6

Aufgabe 1:

Sei $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $F : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit Formmatrix G. Weiter sei der i-te Hauptminor G_i von G für $i = 1, \ldots, n$ von Null verschieden. Zeigen Sie, dass G dann zu der Diagonalmatrix

$$\operatorname{diag}(G_1, G_2/G_1, \ldots, G_n/G_{n-1}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

kongruent ist.

Aufgabe 2:

Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $u, v \in V$. Zeigen Sie:

a) Es gilt die Parallelogramm-Gleichung

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\,(|u|^2 + |v|^2).$$

b) Für $u, v \in V \backslash \{0\}$ gilt der Cosinussatz

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\,|u|\,|v| \cos(\measuredangle(u,v)).$$

c) Die Vektoren u, v sind genau dann orthogonal, wenn die Diagonalen des von u und v aufgespannten Parallelogramms die gleiche Länge besitzen.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass durch $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto |x_1| + |x_2|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist. Gibt es ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^2$, dass die Norm $\|\cdot\|$ induziert, d.h. dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$?

Aufgabe 4:

Sei V die Menge der reellen Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$.

a) Zeigen Sie, dass V mit argumentweiser Addition und skalarer Multiplikation zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum wird.
[Hinweis: Sie dürfen $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ für $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in V$ verwenden.]

b) Zeigen Sie, dass durch $\langle (a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ ein Skalarprodukt auf V definiert ist.

c) Sei $e_j = (\delta_{ij})_{i\in\mathbb{N}}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Familie $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem von V bildet.

d) Bestimmen Sie für $U = \operatorname{sp}(\{e_j \mid j \in \mathbb{N}\})$ die Untervektorräume $U^\perp$ und $(U^\perp)^\perp$.