Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Mo, 02.06.2008, 12h

Lineare Algebra II
Übungsblatt 7

Aufgabe 1:
Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und seien U_1, U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

a) Die Zuordnung $U \mapsto U^\perp$ ist eine bijektive Abbildung auf der Menge aller Untervektorräume von V.

b) Es gilt $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

c) Es gilt $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

d) Aus $U_1 \subset U_2$ folgt $U_2^\perp \subset U_1^\perp$.

Aufgabe 2:
Sei die symmetrische Bilinearform $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

a) Zeigen Sie, dass F ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bzgl. F ausgehend von der Standardbasis.

Aufgabe 3:
Sei $n \in \mathbb{N}$, V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset V$ ein Orthonormalsystem. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ist eine Basis von V.

b) Ist $v \in V$ mit $\langle v, a_i \rangle = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, so folgt $v = 0$.

c) Für alle $u, v \in V$ gilt $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u, a_i \rangle \cdot \langle a_i, v \rangle$.

d) Für jedes $v \in V$ gilt $|v|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, a_i \rangle|^2$.

Aufgabe 4:
Sei $V = \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ der euklidische Vektorraum aller symmetrischen Matrizen aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$ mit dem Skalarprodukt $\langle A, B \rangle = \mathrm{Spur}(AB)$ für $A, B \in \mathbb{R}^{(2,2)}$.

a) Zeigen Sie, dass $U = \{(a_{ij}) \in V \mid a_{11} = a_{22}\}$ ein Untervektorraum von V ist.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

c) Bestimmen Sie die zu U gehörigen orthogonalen Projektionen π und π'. Geben Sie dazu für jede Matrix $A \in V$ deren Bild unter π explizit an.