Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Mo, 09.06.2008, 12h

Lineare Algebra II
Übungsblatt 8

Aufgabe 1:

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und Vektoren $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ sei das Vektorprodukt definiert als

$$x_1 \times \cdots \times x_{n-1} := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \det(A_i)\, e_i \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $x_1, \ldots, x_{n-1}$ die Zeilen der Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n-1,n)}$ sind und A_i für $i = 1, \ldots, n$ aus A durch Streichen der i-ten Spalte hervorgeht.

a) Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $i \neq j$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

   i) $x_1 \times \cdots \times x_{i-1} \times \lambda x_i \times x_{i+1} \times \cdots \times x_{n-1} = \lambda \cdot (x_1 \times \cdots \times x_{n-1})$

   ii) $x_1 \times \cdots \times x_{i-1} \times (x_i + x_j) \times x_{i+1} \times \cdots \times x_{n-1} = x_1 \times \cdots \times x_{n-1}$

b) Bestimmen Sie das Vektorprodukt der drei Vektoren $x_1 = (1, 2, 1, 0)$, $x_2 = (0, -1, 0, 3)$ und $x_3 = (1, 1, 1, 0)$ und das 3-dimensionale Volumen des 3-Parallelotops $P(x_1, x_2, x_3)$. Was fällt Ihnen auf? Können Sie ihre Vermutung für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ beweisen?

Aufgabe 2:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$. Zeigen Sie:

a) Haben die Matrizen der Basiswechsel von $a_1, \ldots, a_n$ zu $b_1, \ldots, b_n$ und von $b_1, \ldots, b_n$ zu $a_1, \ldots, a_n$ nur nicht-negative Einträge, so existieren eine Permutation $\sigma \in S_n$ und positive reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $a_i = \lambda_i b_{\sigma(i)}$ für $i = 1, \ldots, n$.

b) Spannen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ das gleiche n-Parallelotop auf, so ist $b_1, \ldots, b_n$ eine Permutation von $a_1, \ldots, a_n$.

c) Das Volumen eines n-Parallelotops ist wohldefiniert.

Aufgabe 3:

Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $L : V \to V$ heißt *winkeltreu*, wenn L injektiv ist und für alle $u, v \in V \backslash \{0\}$ gilt $\measuredangle(L(u), L(v)) = \measuredangle(u, v)$.

Sei nun $L \in \mathcal{L}(V)$. Zeigen Sie:

a) Ist L winkeltreu, so gilt für orthogonale Vektoren $u, v \in V$ mit $|u| = |v|$ stets $|L(u)| = |L(v)|$. [Hinweis: Betrachten Sie $\langle L(u+v), L(u-v) \rangle$.]

b) Ist L winkeltreu und $u \in V$ mit $|u| = 1$, so gilt $|L(v)| = |L(u)| \cdot |v|$ für alle $v \in V$.

c) L ist genau dann winkeltreu, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ und eine orthogonale Abbildung $L' \in \mathcal{L}(V)$ existieren, so dass gilt $L = \lambda \cdot L'$. Ist die letzte Darstellung von L eindeutig?

Aufgabe 4:

Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi : V \to V$ heißt *Bewegung*, wenn für alle $u, v \in V$ gilt $d(\varphi(u), \varphi(v)) = d(u, v)$.

Zeigen Sie:

a) Für jedes $w \in V$ ist die Translation $T_w : V \to V$, $v \mapsto v + w$ eine Bewegung.

b) Für jede orthogonale Abbildung $L \in \mathcal{L}(V)$ und jedes $w \in V$ ist $T_w \circ L$ eine Bewegung.

c) Für alle $u, v \in V$ und jede Bewegung φ von V mit $\varphi(0) = 0$ gilt $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.

d) Jede Bewegung φ von V mit $\varphi(0) = 0$ ist linear.