Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Mo, 16.06.2008, 12h

# Lineare Algebra II
## Übungsblatt 9

**Aufgabe 1:**

Ist $G$ eine Gruppe mit Untergruppen $U_1$ und $U_2$, so heißt $G$ das *innere direkte Produkt* von $U_1$ und $U_2$, falls gilt:

i) $U_1$ und $U_2$ sind Normalteiler von $G$,

ii) $G = U_1U_2$ und $u_1u_2 = u_2u_1$ für alle $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$,

iii) $U_1 \cap U_2 = \{e_G\}$.

Sei nun $V$ ein endlich-dimensionaler, euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{W}(V)$ die Menge aller winkeltreuen Abbildungen auf $V$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{W}(V)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$.

b) Bestimmen Sie eine Teilmenge $M$ der Menge aller Streckungen von $V$, so dass $\mathcal{W}(V)$ das innere direkte Produkt von $O(V)$ und $M$ ist.

**Aufgabe 2:**

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum, $\Gamma$ die Menge aller Bewegungen von $V$ und $T$ die Menge aller Translationen von $V$. Zeigen Sie:

a) Zu jeder Bewegung $\varphi \in \Gamma$ existiert ein $L \in O(V)$ und ein $w \in V$, so dass gilt $\varphi = T_w \circ L$. Ist diese Darstellung eindeutig?

b) $\Gamma$ ist eine Gruppe mit Untergruppe $O(V)$.

c) $T$ ist ein Normalteiler von $\Gamma$ und es gilt $\Gamma/T \cong O(V)$.

**Aufgabe 3:**

Sei $V$ ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $a_1, \ldots, a_n \in V$, $L \in \mathcal{L}(V)$ und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ die Matrix von $L$ bzgl. $a_1, \ldots, a_n$. Dann heißt die lineare Abbildung $L^* : V \to V$, $L^*(a_j) = \sum_{i=1}^n a_{ji}a_i$ für $j = 1, \ldots, n$ die zu $L$ *adjungierte Abbildung.*

Zeigen Sie:

a) Es gilt $\langle L(u), v\rangle = \langle u, L^*(v)\rangle$ für alle $u, v \in V$.

b) Es existiert genau ein Homomorphismus $\widetilde{L} \in \mathcal{L}(V)$, so dass für alle $u, v \in V$ gilt

$$\langle L(u), v\rangle = \langle u, \widetilde{L}(v)\rangle.$$

c) Ist $L$ orthogonal, so gilt $L \circ L^* = L^* \circ L$.

d) Es ist $L^*$ genau dann orthogonal, wenn $L$ orthogonal ist.

**Aufgabe 4:**

Sei $n \in \mathbb{N}$, $V$ ein $n$-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $H = v_0 + U$ eine affine Hyperebene von $V$, d.h. $U = \{u\}^\perp$ ist eine Hyperebene von $V$ und $v_0 \in V$. Weiter bezeichne $S_u$ die Hyperebenenspiegelung an $U$. Zeigen Sie:

a) Zu jeder Bewegung $\varphi \neq id_V$ mit $\varphi(v) = v$ für alle $v \in H$ existiert ein $w \in V$, so dass sich $\varphi$ schreiben lässt als $\varphi = T_w \circ S_u$. Daher heißt $\varphi$ auch *affine Hyperebenenspiegelung* an $H$ und wird notiert als $S_H$.

b) Ist $\varphi$ eine Bewegung von $V$, so ist $\varphi(H)$ eine affine Hyperebene von $V$ und es gilt

$$\varphi \circ S_H \circ \varphi^{-1} = S_{\varphi(H)}.$$

c) Jede Bewegung von $V$ ist das Produkt von höchstens $n+1$ affinen Hyperebenenspiegelungen.