Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Mo, 23.06.2008, 12h

Lineare Algebra II
Übungsblatt 10

Aufgabe 1:
Sei G eine endliche Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und die Abbildung $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle x, y\rangle_G = \sum_{A\in G} \langle Ax, Ay\rangle.$$

Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_G$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

b) Für jedes $B \in G$ ist die Abbildung $L_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Bx$ orthogonal bzgl. $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_G$.

c) Es existiert eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, so dass gilt $C^{-1}GC \subset O(n,\mathbb{R})$, d.h. G ist isomorph zu einer Untergruppe von $O(n,\mathbb{R})$.

Aufgabe 2:
Sei K ein Körper und $V = K[X]_{\leq 2}$ der K-Vektorraum aller Polynome in $K[X]$ vom Grad kleiner oder gleich 2. Für jede Matrix $A \in K^{(2,2)}$ sei die Abbildung $\varphi_A : K[X]_{\leq 2} \to K^{(2,2)}$ definiert durch

$$\varphi_A(a_2X^2 + a_1X + a_0) = a_2A^2 + a_1A + a_0I_2.$$

Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom $\mathrm{Ch}(A)$ von A gilt $\varphi_A(\mathrm{Ch}(A)) = 0$.

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper und $f \in K[X]\backslash K$. Dann heißt f *reduzibel*, falls es Polynome $g, h \in K[X]\backslash K$ gibt, so dass gilt $f = g \cdot h$. Andernfalls heißt f *irreduzibel*. Das Polynom f heißt *prim*, wenn aus $f \mid gh$ mit $g, h \in K[X]$ stets $f \mid g$ oder $f \mid h$ folgt.
Zeigen Sie:

a) Jedes prime Polynom in $K[X]$ ist irreduzibel.

b) Jedes Polynom $f \in K[X]$ vom Grad größer oder gleich 1 besitzt eine Primfaktor-Zerlegung, d.h. es existieren prime Polynome $g_1, \ldots, g_n \in K[X]$ mit $f = g_1 \cdots g_n$.

c) Für jedes Polynom $f \in K[X]$ vom Grad größer oder gleich 1 existiert genau eine Zerlegung der Form $f = c \cdot g_1 \cdots g_n$ (bis auf Reihenfolge der Faktoren) mit $c \in K^*$ und normierten, primen Polynomen $g_1, \ldots, g_n \in K[X]$.

Aufgabe 4:

a) Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom mit $2 \leq \mathrm{grad}(f) \leq 3$. Zeigen Sie, dass f genau dann reduzibel ist, wenn f in K eine Nullstelle besitzt.

b) Geben Sie alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[X]$ an.

c) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_2[X]$ vom Grad kleiner oder gleich 4.