Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Mo, 30.06.2008, 12h

Lineare Algebra II
Übungsblatt 11

Aufgabe 1:

Seien die Polynome $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{F}_7[X]$ gegeben durch

$$f_1 = X^4 + 4X^3 + 2X^2 + 3X + 4, \quad f_2 = X^3 + 6X^2 + 2, \quad f_3 = X + 1.$$

a) Zeigen Sie, dass f_3 ein Teiler von f_1 und f_2 ist.

b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von f_1 und f_2.

c) Geben Sie zwei Polynome $g_1, g_2 \in \mathbb{F}_7[X]$ an, so dass gilt $f_3 = g_1 f_1 + g_2 f_2$.

Aufgabe 2:

Sei K ein Körper und seien $f, g \in K[X]\backslash\{0\}$. Es gelte $f = c_f \cdot f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n}$ und $g = c_g \cdot f_1^{\beta_1} \cdots f_n^{\beta_n}$ mit paarweise verschiedenen, primen, normierten Polynomen $f_1 \ldots, f_n \in K[X]$, $c_f, c_g \in K\backslash\{0\}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

a) Ist h ein ggT von f und g, so gilt

$$h = c \cdot f_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdots f_n^{\min\{\alpha_n,\beta_n\}}$$

für ein geeignetes $c \in K$.

b) Ist h ein *kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)* von f und g, d.h. h ist Vielfaches von f und g und jedes Vielfache von f und g ist auch Vielfaches von h, so gilt

$$h = c \cdot f_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdots f_n^{\max\{\alpha_n,\beta_n\}}$$

für ein geeignetes $c \in K$.

c) Ist h_1 ein ggT und h_2 ein kgV von f und g, so gilt $h_1 h_2 = cfg$ für ein geeignetes $c \in K$.

Aufgabe 3:

Sei K ein Körper, $f_1, f_2 \in K[X]\backslash\{0\}$ und $g \in K[X]\backslash\{0\}$ ein ggT von f_1 und f_2. Zeigen Sie:

a) Für Polynome $h_1, h_2 \in K[X]$ ist $h_1 f_1 + h_2 f_2$ ein Vielfaches von g.

b) Ist $g = h_1 f_1 + h_2 f_2$ für Polynome $h_1, h_2 \in K[X]$, so sind h_1 und h_2 *teilerfremd*, d.h. 1 ist ein ggT von h_1 und h_2.

c) Gilt $h_1 f_1 + h_2 f_2 = 1$ für Polynome $h_1, h_2 \in K[X]$, so sind $f_1 + f_2$ und $h_1 - h_2$ teilerfremd.

Aufgabe 4:

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Eine Abbildung $L \in \mathcal{L}(V)$ heißt *triagonalisierbar*, wenn es eine Basis $a_1, \ldots, a_n$ von V gibt, bzgl. der die Matrix von L eine untere Dreiecksmatrix ist.

a) Zeigen Sie, dass ein Endomorphismus L genau dann triagonalisierbar ist, wenn sein charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt.
[Hinweis: Beweisen Sie die Richtung „$\Leftarrow$“ mit Induktion nach n.]

b) Überprüfen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$$

auf Triagonalisierbarkeit, d.h. den durch $x \mapsto Ax$ definierten Endomorphismus auf $\mathbb{R}^3$, und geben Sie ggf. eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ an, so dass SAS^{-1} eine untere Dreiecksmatrix ist.