Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Mo, 07.07.2008, 12h

Lineare Algebra II
Übungsblatt 12

Aufgabe 1:
Seien die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Geben Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ an, so dass die Matrix $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt besitzt.

b) Entscheiden Sie, ob B diagonalisierbar ist.

c) Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2:
Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V)$.
Zeigen Sie:

a) Ist L symmetrisch, so ist jeder Eigenwert von L reell, d.h. das charakteristische Polynom von L zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.

b) Gilt $L^2 = id_V$, so ist L diagonalisierbar.

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ diagonalisierbar.
Zeigen Sie:

a) Ist $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$, so gilt $L_2(E(L_1, \lambda)) \subseteq E(L_1, \lambda)$ für jeden Eigenwert λ von L_1.

b) Ist $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$ und sind $\mu_1, \ldots, \mu_l$ die Eigenwerte von L_2, so gilt

$$E(L_1, \lambda) = (E(L_1, \lambda) \cap E(L_2, \mu_1)) \oplus \cdots \oplus (E(L_1, \lambda) \cap E(L_2, \mu_l))$$

für jeden Eigenwert λ von L_1.

c) Es gilt genau dann $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$, wenn es eine Basis $a_1, \ldots, a_n$ von V gibt, bzgl. der die Matrizen von L_1 und L_2 Diagonalgestalt besitzen.

Aufgabe 4:
Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq p$. Bestimmen Sie die Anzahl der Matrizen $A \in \mathbb{F}_p^{(n,n)}$ mit Eigenwerten $0, 1, \ldots, n-1 \in \mathbb{F}_p$.