Prof. Dr. Franz Kalhoff
Dipl.-Math. Holger Bluhm

Abgabe: Mo, 14.07.2008, 12h

Lineare Algebra II
Übungsblatt 13

Aufgabe 1:

Auf $\mathbb{R}^3$ seien die quadratischen Formen P und Q bzgl. der Standardbasis gegeben durch

$$P(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$$
$$Q(x) = 5x_1^2 + 12x_2^2 + 35x_3^2 - 18x_1x_2 + 28x_1x_3 - 42x_2x_3.$$

a) Geben Sie die Formmatrizen von P und Q bzgl. der Standardbasis an, und entscheiden Sie, welche der beiden quadratischen Formen positiv definit ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die P und Q simultan diagonalisiert.

Aufgabe 2:

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V)$. Dann heißt V *L-zyklisch*, wenn es ein $v \in V$ gibt mit $\mathrm{sp}_L(v) := \mathrm{sp}(L^k(v) \mid k \in \mathbb{N}_0) = V$.

Zeigen Sie, dass V genau dann L-zyklisch ist, wenn eine Basis von V existiert, bzgl. der die Matrix von L die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_1, \ldots, a_n$ besitzt.

Aufgabe 3:

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Für jeden Endomorphismus $L : V \to V$ sei die Abbildung $\varphi_L : K[X] \to \mathcal{L}(V)$ definiert durch

$$a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 = f \mapsto f(L) = a_nL^n + \cdots a_1L + a_0 id_V.$$

Sei nun $L \in \mathcal{L}(V)$. Zeigen Sie:

a) Für jedes $v \in V \backslash \{0\}$ ist $\mathrm{sp}_L(v)$ ein L-invarianter Untervektorraum von V.

b) Für jedes $v \in V \backslash \{0\}$ ist $\dim(\mathrm{sp}_L(v))$ die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die gilt

$$L^k(v) \in \mathrm{sp}(v, L(v), \ldots, L^{k-1}(v)).$$

c) Ist $\mathrm{Ch} \in K[X]$ das charakteristische Polynom von L, so ist $\mathrm{Ch}(L) = \varphi_L(\mathrm{Ch})$ die Nullabbildung auf V.
[Hinweis: Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $L|_{\mathrm{sp}_L(v)}$ für jedes $v \in V$.]

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V)$. Das *Minimalpolynom* von L ist das gradkleinste, normierte Polynom $m_L \in K[X]$, für das $m_L(L)$ die Nullabbildung ist. Zeigen Sie:

a) m_L ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms von L.

b) Für jedes $v \in V \backslash \{0\}$ ist der Grad des Minimalpolynoms von $L|_{\mathrm{sp}_L(v)}$ gerade die Dimension des L-zyklischen Untervektorraums $\mathrm{sp}_L(v)$.

c) L ist genau dann diagonalisierbar, wenn m_L in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.