Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

10.04.2008

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) WS 2008
Blatt 2

Erstellen Sie für die folgenden Aufgaben jeweils ein präzises mathematisches Modell!

Aufgabe 4
a) N Paare besuchen einen Tanzkurs. Wie groß ist – nach zufälligem Partnerwechsel – die Wahrscheinlichkeit, daß keine Dame mit ihrem eigenen Partner tanzt.
a) Kindergeburtstag: N Kinder bringen "Preise" für eine Lotterie mit. Jedes Kind erhält genau einen Preis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau k Kinder ihren eigenen Preis gewinnen?

Aufgabe 5
a) In Hörsaal E 29 befinden sich $N \leq 365$ Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. (Dabei sind – nicht ganz der Realität entsprechende – Annahmen nötig, die die Gleichverteilungsvoraussetzung rechtfertigen: Schaltjahre und Geburtstage am 29. Februar werden nicht berücksichtigt, es wird angenommen, daß Geburten an den 365 Tagen des Jahres stets mit gleicher Häufigkeit stattfinden.)
b) Eine Umfrage im Hörsaal ergibt, daß k der N Personen am ersten April Geburtstag haben und daß alle übrigen an verschiedenen Tagen Geburtstag feiern. Wie wahrscheinlich ist dieses Ereignis?

Aufgabe 6
a) Aus einem Karton mit $N = 100$ Glühbirnen werden zur Qualitätskontrolle $k = 4$ Glühbirnen zufällig herausgegriffen, getestet und *nicht* zurückgelegt. Der Karton kann die Kontrolle passieren, wenn alle k Glühbirnen ohne Defekt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit durchläuft ein Karton mit $p = 30$ defekten Glühbirnen dieses Kontrollsystem unbeanstandet?
b) Es wird mit 4 (idealen) Würfeln gewürfelt, dabei werden die Augenzahlen $a(i), 1 \leq i \leq 4$ notiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man mit den gewürfelten Augen $a(i)$ eine der "Figuren" $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$ oder $\{4,5,6\}$ bilden kann?

Aufgabe 7
$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ und $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_K\}$ seien endliche Mengen. Es sei $\mathcal{A}$ die Menge *aller* Abbildungen von Ω nach Λ. $\mathcal{S}$ bezeichne die Menge der *surjektiven* Abbildungen in $\mathcal{A}$.
a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $\mathcal{A}$ und von $\mathcal{S}$.
b) Wie groß ist (bei Gleichverteilung) die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällige ausgewählte Abbildung zwischen zwei endlichen Mengen surjektiv ist.
Hinweis zu a) Bestimmen Sie card $\complement\mathcal{S}$ mittels der Siebformel.
c) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Formel:
$\text{card}\,\{f : \{1, \ldots N\} \to \{1, \ldots, K\}$ mit $\text{card} f^{-1}\{i\} = j_i \ (1 \leq i \leq K)\} = \frac{N!}{j_1! \cdots j_K!}$.
Dabei sind $j_i \geq 0$, $\sum j_i = N$ sowie $K \leq N$ vorausgesetzt.
d) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Formel erneut card$\mathcal{S}$.

Aufgabe 8
a) Sei $\widetilde{\Omega} := \mathrm{Per}(r,n)$, $\Omega := \mathrm{Komb}(r,n)$ und sei $\pi : f \mapsto [f]$ die kanonische Abbildung. Weiter sei $\widetilde{W}$ die Gleichverteilung auf $\widetilde{\Omega}$. Bestimmen Sie die Bildverteilung $\pi(\widetilde{W})$.
b) Verfahren Sie ebenso für $\widetilde{\Lambda} := \mathrm{PerW}(r,n)$ und $\Lambda := \mathrm{KombW}(r,n)$.
c) Verdeutlichen Sie die Ergebnisse in a) und b) mittels einfacher Zahlenbeispiele, etwa $n = 3,\ r = 2$.

Aufgabe 9 Die folgende Aufgabe wurde im *Forum* in diesem Semester gestellt.
Gegeben sind n 6-seitige, faire Würfel. Diese n Würfel werden gleichzeitig geworfen. Es wird nun die Augenzahl eines jeden Würfels notiert; sprich man bekommt einen Vektor mit n Einträgen zwischen 1 und 6. Sollte ein Würfel eine 6 zeigen, wird dieser erneut gewürfelt und die Augenzahl zu der vorherigen (also 6) addiert (sprich der Vektor hat nun immer noch n Einträge, die aber zwischen 1 und 12 liegen können). Wurde wieder eine 6 gewürfelt, wird dieser Würfel erneut geworfen, usw. Sprich man würfelt so lange jede geworfene 6 nochmal, bis keine 6 mehr geworfen wurde. Die Augenzahl dieser 6-er-Reihen wird wie beschrieben addiert (d.h. man hat im k-ten Wurf einen Vektor mit n Einträgen, die zwischen 1 und $k \cdot 6$ liegen).
Konkretes Zahlenbeispiel
$n = 10$
1. Wurf: (1,3,6,2,5,6,1,6,6,5) 4 Sechsen, die nochmals gewürfelt werden und dabei im
2. Wurf: (1,6,6,3) ergeben. Somit hätte man (1,3,7,2,5,12,1,12,9,5) und es wurden wieder 2 Sechsen gewürfelt, die nun nochmals im
3. Wurf: (5,2) ergeben. Somit hat man: (1,3,7,2,5,17,1,14,9,5)
So, das sind die Grundlagen des Würfelmechanismus :
Das Problem an sich lautet nun:
Wenn n Würfel gegeben sind, wie groß ist dann die W'keit, dass mindestens ein Eintrag im Vektor, der durch obige Würfelprozedur entstanden ist, größer oder gleich einem Wert x ist. [Z.B. : $n = 120, , x = 30$]
Ändern Sie das Verfahren ab: Zu jeder 6-er Reihe wird die Augenzahl des letzten Wurfs (also $\neq 6$ addiert.
Versuchen Sie (1) ein mathematisches Modell zu finden und (2) ein Modell zu finden, das sich aus einzelnen 'einfacheren' Bausteinen zusammensetzt.

Sprechstunden im SoSe 2008
W. Hazod: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627
Tel.: 3055 e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de
Übungsleiter:
W. Grundmann
Sprechstunde: n. V.
e-mail: Waldemar.Grundmann@uni-dortmund.de
A. Kaplun Tel.: 3437
Sprechstunde: Mittwoch, 13–14.30 M 634
e-mail: Alexander.Kaplun@uni-dortmund.de
K. Kosfeld Tel.: 5917
Sprechstunde: Dienstag, 12–13 M 630
e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de
Zusatzübungen:
K. Kosfeld s.o.