Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

18.04.2008

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) WS 2008
Blatt 3

Aufgabe 10 Sortiertheit von Listen Eine Liste von n (verschiedenen) Symbolen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ist nach einem gewissen Merkmal zu sortieren. O.B.d.A. nehmen wir also an, daß die a_i natürliche Zahlen aus $\{1, \ldots, n\}$ sind, indem wir das Symbol mit dem Rang des beobachteten Merkmals identifizieren. Für die Effizienz des Algorithmus ist das Wissen um die Vorsortiertheit der Liste wichtig. Eine Liste $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ heißt in den Punkten $\{i_1, \ldots i_k\}$ vorsortiert, wenn für diese Indices gilt $a_{i_j} = i_j,\ 1 \leq j \leq k$. (Dabei ist $1 \leq k \leq n$.)
Setzen Sie Gleichverteilung auf der Menge aller Anordnungen der a_i voraus und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß eine Liste an genau k Punkten vorsortiert ist.

Aufgabe 11
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällige Permutation in $\Omega := \mathrm{Per}(r, r)$ höchstens k Fixpunkte besitzt ($k \leq r$).
b) Unter 55 Hörern einer Vorlesung gibt es 3 Geburtstagszwillinge, die Geburtsdaten aller übrigen Hörer sind verschieden. Wie wahrscheinlich ist dieses Ereignis?
⟦ Bestimmen Sie dazu zunächst die Anzahl aller k-Tupel von paarweise disjunkten Paaren $\{\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\} \cdots \{i_k, j_k\}\}$, die man in $M_r = \{1, \ldots r\}$ bilden kann. ⟧

Aufgabe 12 In einem Hörsaal befinden sich N Hörer. Sie werden nach Merkmalsgruppen eingeteilt, darunter A_1 *männlich*, A_2 *Blutgruppe* 0, A_3 *mathematisch begabt*. Die Merkmale treten mit folgenden Häufigkeiten auf:

A_1 50 %	A_2 20 %	A_3 50 %
A_1 und A_2 10 %	A_1 und A_3 30 %	A_2 und A_3 10 %
A_1 und A_2 und A_3 zugleich 5 %		

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Hörer
a) mindestens eines der drei Merkmale $A_i, 1 \leq i \leq 3$
b) weder die Merkmale A_1 noch A_2
c) eines der Merkmale A_1 oder A_3
d) genau zwei der drei Merkmale ?

Aufgabe 13
a) In einer Urne befinden sich w weiße, r rote und s schwarze Kugeln. Es wird r Mal gezogen, **(i)** *ohne* **(ii)** *mit* Zurücklegen.
Wie groß ist – im Fall (i) bzw (ii) – die Wahrscheinlichkeit,
a1) dabei k weiße Kugeln zu ziehen,
a2) beim k-ten Zug weiß zu ziehen,
a3) beim k-ten Zug *erstmals* weiß zu ziehen.
Stellen Sie geeignete Modelle auf! Zeigen Sie, daß es genügt, Modelle mit nur zwei Farben zu betrachten!
b) Mit einem Würfel wird fünf Mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß alle geworfenen Augenzahlen voneinander verschieden sind.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Roulette nach dreißig Spielen alle erzielten Zahlen verschieden sind.

Aufgabe 14 Das *Roulette Spiel* (B. Pascal, 1765):
A Das klassische Roulette.
Eine Kugel ermittelt eine der Zahlen aus $\{0, 1, \ldots 36\}$. Der Spieler kann auf *einzelne Zahlen* oder auf *einfache Chancen* (chances simples) setzen, also auf *pair* d.h. gerade Zahlen in $\{1, \ldots, 36\}$, oder *impair*, das Komplement (wieder ohne 0), analog *manque* $\{1, \ldots, 18\}$ bzw. *passe* $\{19, \ldots, 36\}$, resp. *rouge* $\{1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36\}$ bzw. *noir* die restlichen Zahlen in $\{1, \ldots, 36\}$. Die Null (*zero*) ist grün!
B Das französische Roulette.
Diese Variante spielt eine Sonderrolle, sie wird erst zu einem späteren Zeitpunkt behandelt: Wenn auf eine der einfachen Chancen oder auf eine Zahl aus $\{1, \ldots, 36\}$ gesetzt wurde und *zero* fällt, dann wird der Einsatz eingefroren bis zur nächsten Runde. (Wenn auch hier 0 fällt, wird abermals eingefroren etc.)
C Amerikanisches Roulette.
Wie in A (ohne Einfrieren), aber es gibt neben *zero* eine Doppelnull mit gleicher Funktion, also auch grün.
D Mexikanisches Roulette (für Gringos)
Wie die amerikanische Variante, aber zusätzlich eine dreifache Null.
Bestimmen Sie in A), C), D) jeweils die Gewinnchancen,
wenn auf *Zahl* gesetzt wurde, und
wenn auf eine *einfache Chance* gesetzt wurde.

Aufgabe 15 *Maxwell-Boltzmann-/ Bose-Einstein-/ Fermi-Dirac-Statistik.*
(Vgl. Vorlesung, 2.5.3)
a) r "Objekte" (z.B. Gasmoleküle, Photonen oder Elektronen) werden auf N "Fächer" (z.B. Teilmengen des Phasenraumes) verteilt. Für jedes $i_0 \in M_r$ bezeichne f_{i_0} die Abbildung $f_{i_0} : \Omega \to M_r$, die die Anzahl der Objekte im Fach F_{i_0} angibt. Geben Sie die Bildverteilung von f_{i_0} an, d.h. geben Sie $W(E_{i_0,j})$ an, wobei $E_{i_0,j} := f_{i_0}^{-1}\{j\}$ das Ereignis { *im i_0-ten Fach befinden sich j Objekte* } bezeichnet. Dabei werden alle Belegungen als gleichwahrscheinlich angenommen, die Objekte werden als **(i)** unterscheidbar, **(ii)** nicht unterscheidbar angenommen und die Kapazität der Fächer wird als $\alpha) = 1$ bzw. $\beta) = \infty$ vorausgesetzt.
b) Diskutieren Sie anhand der Ergebnisse, ob die folgende Ansicht richtig ist:
Die Objekte können als "nicht unterscheidbar" angesehen werden, solange die Meßgenauigkeit keine Unterscheidung zuläßt.

Abgabe der ersten 4 Aufgaben:
in den Kästen im Foyer bis Donnerstag, 24.4.06 12 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2008
W. Hazod: Tel.: 3055. Sprechstunde: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627
e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de
Übungsleiter:
W. Grundmann Tel.: 3432. Sprechstunde: Montag, 9–10 M 613
e-mail: Waldemar.Grundmann@uni-dortmund.de
A. Kaplun Tel.: 3437 Sprechstunde: Mittwoch, 13–14.30 M 634
e-mail: Alexander.Kaplun@uni-dortmund.de
K. Kosfeld Tel.: 5917 Sprechstunde: Dienstag, 12–13 M 630
e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de
Zusatzübungen: Neuer Temin: Freitag 10–12 E29