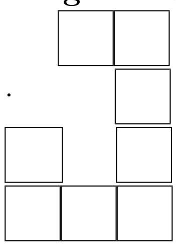
Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

24.04.2008

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) WS 2008
Blatt 4

Aufgabe 16 a) Gegeben sei ein J-förmiger Gegenstand (siehe Skizze).



Dabei sei die Seitenlänge eines einzelnen Quadrats gleich 1cm. Auf einer Tischplatte werden parallele Linien im Abstand von 10 cm gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Gegenstand, wenn er *zufällig* auf die Platte geworfen wird, eine der Linien schneidet?

b) Zwei Studenten (geschlechtsneutral) besuchen täglich die Mensa. Die Mensa öffnet um 12 Uhr und läßt nach 13 Uhr keine Gäste mehr ein. Bei beiden ist der Ankunftszeitpunkt zufällig und im Intervall [12,13] gleichverteilt. Beide verbringen täglich exakt 15 Minuten in der Mensa.Wie groß ist die Wahrscheinlichzkeit, daß sie sich zur selben Zeit dort aufhalten? $[\![$ Stellen Sie die Ankunft der beiden als Punkt im $\mathbb{R}^2$ dar, der im Quadrat $[12, 13]^2$ gleichverteilt ist.$]\!]$

Aufgabe 17 Ein Fußball entsteht, indem man von einem regulären Körper mit 12 Ecken, der begrenzt ist von 20 gleichseitigen Dreiecken, die Ecken abschneidet. Dabei werde jede Seite s in der Höhe $s/3$ und $2s/3$ geschnitten. Da an jeder Ecke 5 Kanten zusammenstoßen, entsteht durch das Abschneiden jeder Ecke ein reguläres 5–Eck mit Seitenlänge $s/3$, und von den Dreiecken verbleibt ein reguläres 6–Eck mit Seitenlänge $s/3$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Elfmeterschießen ein Fünfeck getroffen wird?
$[\![$ Berechnen Sie zunächst die Fläche eines 5–Ecks und eines 6–Ecks ! $]\!]$

Aufgabe 18 $A_1, A_2, A_3 \in \Sigma$ seien Ereignisse eines Wahrscheinlichkeitsraumes.
Sei $T := (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$.
Dann läßt sich (vgl. Aufgabe 1 l)) das Ereignis T als Vereinigung paarweise disjunkter Ereignisse darstellen:
$T = (A_1 \cap A_2 \cap \complement A_3) \uplus (A_1 \cap \complement A_2 \cap A_3) \uplus (\complement A_1 \cap A_2 \cap A_3) \uplus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
a) Seien $W(A_i) =: p_i,\ q_i := 1 - p_i$ mit $p_i \in (0, 1)$. Es gelte
$W(A_i \cap A_j) = W(A_i) \cdot W(A_j)$ sowie $W(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p_1 p_2 p_3$.
Zeigen Sie: $W(T) = p_1p_2p_3 + p_1p_2q_3 + p_1p_3q_2 + p_2p_3q_1$
b) Ein Sicherheitssystem enthalte einen Schaltkreis bestehend aus drei Modulen, die so verbunden sind, daß das System ausfällt, sobald mindestens zwei Module ausgefallen sind. Die Lebensdauern L_i der einzelnen Module haben die gleiche Verteilung, d.h. für $t \geq 0$ ist $R(t) := W(L_i > t)$ unabhängig von i.
Versuchen Sie eine Formel für die Verteilungsfunktion der Lebensdauer S des gesamten Schaltkreises zu finden, d.h. für die Wahrscheinlichkeiten $W(S \leq t)$, resp. für $W(S > t)$.
$[\![$ Setzen Sie für festes $t > 0$ $\ A_i := A_i(t) := \{L_i > t\}$. Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit Sie den Aufgabenteil a) anwenden können? $]\!]$

Aufgabe 19 Im Folgenden sei stets F eine *Verteilungsfunktion* auf $\mathbb{R}$ mit *Wahrscheinlichkeitsdichte* f. Dabei bezeichne $c > 0$ eine Normierungskonstante. Bestimmen Sie im Folgenden jeweils die Dichte f bzw. die Verteilungsfunktion F und ggf. die Konstante $c > 0$. Fertigen Sie jeweils Skizzen von f und F an!

a) (*Dreiecks*verteilung, *Simpson*verteilung): Sei $a < b$.
$f(x) := c \cdot \left((x-a) \cdot 1_{(a,(a+b)/2)}(x) + (b-x) \cdot 1_{((a+b)/2,\ b)}(x)\right)$

b) (*Weibull*verteilung, *Rayleigh*verteilung.)
$F(x) := \left(1 - e^{-x^\alpha}\right) \cdot 1_{\mathbb{R}_+}(x)$, $\alpha > 0$.
Allgemeiner: $F(x) := \left(1 - e^{-\gamma \cdot x^\alpha}\right) \cdot 1_{\mathbb{R}_+}(x)$, $\alpha, \gamma > 0$.

c) (*Max-stabile* Verteilung Typ Φ_α)
$F(x) := e^{-x^{-\alpha}} \cdot 1_{\mathbb{R}_+^*}(x)$, $\alpha > 0$.
Allgemeiner: $F(x) := e^{-\gamma \cdot x^{-\alpha}} \cdot 1_{\mathbb{R}_+^*}(x)$, $\alpha, \gamma > 0$.
Welche Beziehung besteht zwischen den Verteilungen des Typs b) und c?

d) (*Max-stabile* Verteilung Typ Λ) Sei $\gamma > 0$.
$F(x) := \exp(-\gamma \cdot \exp(-x)),\ x \in \mathbb{R}$

e) *Beta*verteilungen B(2,2):
$f(x) := c \cdot (x \cdot (1-x)) \cdot 1_{[0,1]}(x)$
Allgemeiner: für $\alpha, \beta > 0$: $f(x) := c \cdot \left(x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}\right) \cdot 1_{[0,1]}(x)$

f) (*Pareto*verteilung)
$f(x) := c \cdot x^{-\beta} \cdot 1_{[1,\infty)}(x), \quad \beta > 1.$

g) (*Potenz*verteilungen)
$f(x) := c \cdot x^\beta \cdot 1_{[a,b]}(x), \quad \beta > 0, 0 \le a < b.$

h) Ebenso: (*Standard Cauchy*) $F : x \mapsto \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan(x)\right)$

j) *Arcussinus Verteilung*
$F : x \mapsto \frac{2}{\pi}\left(\arcsin(x^{1/2})\right), \quad 0 \le x \le 1.$

k) (*Maxwell*verteilung)
$f : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot x^2 \cdot e^{-x^2/2} \cdot 1_{\mathbb{R}_+}(x)$

Abgabe:
in den Kästen im Foyer bis Freitag, 2.5.06 12 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2008
W. Hazod: Tel.: 3055. Sprechstunde: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627
e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de
Übungsleiter:
W. Grundmann Tel.: 3432. Sprechstunde: Montag, 9–10 M 613
e-mail: Waldemar.Grundmann@uni-dortmund.de
A. Kaplun Tel.: 3437 Sprechstunde: Mittwoch, 13–14.30 M 634
e-mail: Alexander.Kaplun@uni-dortmund.de
K. Kosfeld Tel.: 5917 Sprechstunde: Dienstag, 12–13 M 630
e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de
Zusatzübungen: Neuer Temin: Freitag 10–12 E29