Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

29.04.2008

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) WS 2008
Blatt 5

Aufgabe 20 a) **a)** Drei Gefangene werden durch ihren Wärter davon informiert, daß einer von ihnen auf gut Glück ausgewählt wurde, um als warnendes Beispiel exekutiert zu werden, während die anderen beiden auf freien Fuß gesetzt würden. Ein Gefangener bittet den Wärter, ihm im Vertrauen einen von seinen Mitgefangenen zu benennen, der freigelassen würde. Dabei wies er darauf hin, daß diese Information ja doch nicht viel wert sei, da er ja bereits wüßte, daß einer der beiden freigelassen würde. Der Wärter verweigerte die Auskunft: Die Chancen des Fragestellers exekutiert zu werden, würden sonst von $1/3$ auf $1/2$ steigen, da dann nur noch 2 mögliche Todeskandidaten übrig blieben.
b) *(Ziegenbeispiel)* Bei einer Fernsehveranstaltung findet ein Glückspiel statt: Der Kandidat steht vor 3 (gleichartigen) Türen. Er weiß, daß hinter einer ein neues Auto als Preis steht, hinter den beiden anderen je eine Ziege. Der Spieler wählt eine Tür auf gut Glück.
Nun hält der Spielleiter – der die Position des Hauptgewinns kennt – das Spiel an, öffnet eine der beiden anderen Türen, hinter der sich eine Ziege befindet. Der Kandidat darf nun nochmals überlegen, ob er bei seiner Wahl bleiben will, oder die andere verbliebene Tür wählt. Was soll der Spieler tun?

Aufgabe 21 *Computerdiagnose für eine Krankheit*
a) Eine Krankheit K kommt in einer bestimmten Bevölkerungsgruppe mit 5% Häufigkeit vor. Sie sei durch eine Reihe von Symptomen S (z.B. Fieber, Blutdruck Alter ...) hinreichend genau beschrieben. Die Symptome werden in qualitativen bzw. quantitativen Abstufungen erfaßt. Der bei einem Patienten beobachtete Symtomkomplex komme bei einem Patienten mit 13% Häufigkeit vor, wenn er an K erkrankt ist, dagegen nur mit 0,2%, wenn K nicht vorliegt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein Patient mit den Symptomen S an der Krankheit K leidet.
b) Oft muß der Arzt bei einem Patienten an mehrere Krankheiten von verschiedener Gefährlichkeit und verschiedenen Heilungsaussichten denken. In die engere Wahl seien die Diagnosen A, B, C gekommen, die mit den Häufigkeiten 80%, bzw. 15% bzw. 5% auftreten. Die Mißerfolgsquote bei Behandlung nach richtiger bzw. falscher Diagnose ergibt sich aus folgender Tabelle:

wahre Krankheit	Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Diagnose	Mißerfolgsquote bei Behandlung als Krankheit		
		A	B	C
A	80%	1%	2%	2%
B	15 %	20 %	5%	30%
C	5%	50%	50%	10 %

b1) Es werde nach A behandelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Mißerfolgs? (Verfahren Sie analog bei B und C).
b2) Welche Vorgehensweise würden Sie dem Arzt empfehlen?

Aufgabe 22 An einer Universität werden in den Studiengängen S_1, ... S_6 Bewerber ausgewählt. Nach Abschluß des Auswahlverfahrens erhält man:

Studiengang Nr:	**Männliche Bewerber**	davon zugelassen	in%	**Weibliche Bewerber**	davon zugelassen	in %
1	825	512		108	89	
2	560	353		25	17	
3	325	120		593	226	
4	417	138		375	131	
5	191	53		393	114	
6	373	22		341	24	
gesamt						

Dies ergibt insgesamt eine höhere Zulassungsquote für Männer als für Frauen. Diese Diskriminierung steht im Widerspruch zur Situation in jedem einzelnen Studiengang. (Berechnen Sie die Zulassungsquoten insgesamt und in S_i.) Wie könnte man das erklären?
Hinweis: Entwerfen Sie ein mathematisches Modell auf folgende Weise:
Seien $\Omega := \{\text{Bewerber}\}$, $Z := \{\text{zugelassene Bewerber}\}$, $\Omega_i := \{\text{Bewerber im Studiengang } S_i\}$, $M := \{\text{männliche Bewerber}\}$, $\complement M := \{\text{weibliche Bewerber}\}$. Berechnen Sie $W(Z|M)$ und $W(Z|\complement M)$.

Aufgabe 23 **a)** Ein Fußball ist in erster Näherung eine Kugel mit Radius R. Produktionsbedingt schwankt der **Radius** $\mathcal{R}$ um den Sollwert $\mathcal{R}_0$, und zwar ist die Verteilung von $\mathcal{R}$ eine Gleichverteilung in $[\mathcal{R}_0 - \epsilon, \mathcal{R}_0 + \epsilon]$. Geben Sie die Verteilungsfunktionen und die Dichten **a1)** der Oberfläche $\mathcal{O}$ und **a2)** des Volumens $\mathcal{V}$ an.
b) Nun sei (mit den Bezeichnungen von a)) bekannt, daß die **Oberfläche** $\mathcal{O}$ gleichverteilt ist in $[\mathcal{O}_0 - \alpha, \mathcal{O}_0 + \alpha]$. Geben Sie die Verteilungsfunktionen und Dichten von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{V}$ an.

Zusatzaufgabe
Fertigen Sie in den folgenden Aufgaben zu "geometrischen Wahrscheinlichkeiten" Skizzen der 'günstigen' und der 'möglichen' Ereignisse an. Dies kann den Arbeitsaufwand enorm verringern ! **a)** Ein Tennisball mit Durchmesser 3 cm wird gegen einen Zaun geworfen. Der Zaun besteht aus Draht mit quadratischen Maschen der Seitenlänge 4cm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Ball den Zaun berührt?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die quadratische Gleichung
$x^2 + \alpha x + \beta = 0$
zwei reelle Lösungen besitzt?
(1) Dabei seien (α, β) in $[0,1]^2$ gleichverteilt gewählt.
(2) Analog: (α, β) in $[-1,1]^2$ gleichverteilt bzw.
(3) (α, β) in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ gleichverteilt.
c) Der Punkt (x, y) sei gleichverteilt im Quadrat $[0,1]^2$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß
$x^2 + y^2 \leq 1$ und $x^2 + y \geq 1$?

Abgabe: in den Kästen im Foyer bis Donnerstag, 8.5.06 12 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2008
W. Hazod: Tel.: 3055. Sprechstunde: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627
e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de
Übungsleiter:
W. Grundmann Tel.: 3432. Sprechstunde: Montag, 9–10 M 613
e-mail: Waldemar.Grundmann@uni-dortmund.de
A. Kaplun Tel.: 3437 Sprechstunde: Mittwoch, 13–14.30 M 634
e-mail: Alexander.Kaplun@uni-dortmund.de
K. Kosfeld Tel.: 5917 Sprechstunde: Dienstag, 12–13 M 630
e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de