Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

5.05.2008

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) WS 2008
Blatt 6

Aufgabe 24 **a)** $F = F_\mu$ sei die Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$. F sei strikt monoton wachsend und stetig auf $[a, b]$, wobei $F(x) = 0$ für $x \leq a$ und $= 1$ für $x \geq b$ ist . Dabei sind $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen. γ bezeichne die Gleichverteilung auf $[0, 1]$. Dann existieren monoton wachsende stetige Funktionen $h,\ g$ mit $h(\gamma) = \mu$ und $g(\mu) = \gamma$.
$[\![$ Hinweis: Welche Gestalt muß die Verteilungsfunktion $F_{g(\mu)}$ haben? $]\!]$
b) Erläutern Sie dies anhand einer Exponentialverteilung bzw. einer Normalverteilung.
c) Sei γ wie in a) und sei $\mu = \sum_{i=1}^N p_i \varepsilon_{x_i}$ eine diskrete Verteilung. Geben Sie in diesem Fall eine monotone Funktion h an mit $h(\gamma) = \mu$.

Aufgabe 25 **a)** ξ sei eine Zufallsvariable mit Exponentialverteilung E_λ (mit Parameter $\lambda > 0$). Berechnen Sie

$$W\left(\frac{1}{\lambda} < \xi \leq \frac{2}{\lambda} | \xi > \frac{1}{\lambda}\right) \qquad (*)$$

b) Analog. Nun habe ξ eine Weibullverteilung, d.h.

$$W(\xi \leq x) = \left(1 - e^{-\lambda \cdot x^\beta}\right) \cdot 1_{\mathbb{R}_+}(x), \quad \lambda,\ \beta > 0.$$

Geben Sie die Dichte der Verteilung an. Berechnen Sie $(*)$ in diesem Fall.

Aufgabe 26 Sei $\xi_n,\ n \geq 1$, eine Markoffkette mit Werten in $\{1, \ldots 4\}$. $\vec{p}^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, p_3^{(n)}, p_4^{(n)})$ die Verteilung von ξ_n für ein (festes) $n = n_0 \in \mathbb{Z}_+$. Dabei sei $0 < p_i^{(n)} < 1$ vorausgesetzt.
Die Ereignisse $A,\ B,\ C$ seien wie folgt definiert: $A := \{\xi_n = 1\}$, $B := \{\xi_n \in \{1, 2, 3\}\}$ und $C := \{\xi_n \in \{2, 3\}\}$.
Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten
$W(A|B)$, $W(B|A)$ und $W(A \cup C|B)$.

Aufgabe 27
Bei der Übertragung von "Punkten" und "Strichen" in einem Fernmeldesystem werden durch Störungen im Mittel α % der gesendeten Punkte als Striche und β % der gesendeten Striche als Punkte empfangen. Das Verhältnis von gesendeten Punkten zu gesendeten Strichen sei $R > 0$.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein gesendetes Signal richtig empfangen wird?
b) Es wird das Signal *Punkt* [bzw. *Strich*] empfangen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß auch *Punkt* [bzw. *Strich*] gesendet wurde?
c) Der empfangene Text wird weitergesendet. Die Zufallsvariablen $\xi_n : \Omega \to \{\cdot, -\} \cong \{0, 1\}$ geben das Signal nach der n-fachen Übertragung an, $n \in \mathbb{N}$.
Überlegen Sie, unter welchen Voraussetzungen man annehmen darf, daß eine zeitlich homogene Markoff-Kette vorliegt.

Geben Sie zu den nachstehenden Übergangsmatrizen von zeitlich homogenen Markoffketten die Übergangsgraphen an. Geben Sie weiter die 2-Schritt Übergangsmatrizen sowie die zugehörigen Inzidenzmatrizen an:

d) P sei eine Dreibandmatrix, die Kette habe *einen* Friedhof.

$$P = \begin{pmatrix} r_1 & p_1 & 0 & 0 \\ q_2 & r_2 & p_2 & 0 \\ 0 & q_3 & r_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(dabei seien } q_1 = 0, q_i + r_i + p_i = 1, 1 \leq i \leq 3)$$

Analog: Dreibandmatrizen mit *zwei* Friedhöfen bzw. *ohne* Friedhof:

e) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & r_2 & p_2 & 0 \\ 0 & q_3 & r_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **f)** $P = \begin{pmatrix} r_1 & p_1 & 0 & 0 \\ q_2 & r_2 & p_2 & 0 \\ 0 & q_3 & r_3 & p_3 \\ 0 & 0 & q_4 & r_4 \end{pmatrix}$

Zusatzaufgabe: Sei X eine in $[-2, 3]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Geben Sie die Dichten der Zufallsvariablen Y bzw. Z an:

a) f $Y := e^X$ **b)** $Z := e^{|X|}$

Hinweis: zu b): Bestimmen Sie zunächst die Dichte von $|X|$!

Abgabe: in den Kästen im Foyer bis Donnerstag, 8.5.06 12 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2008

W. Hazod: Tel.: 3055. Sprechstunde: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627
e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de

Übungsleiter:

W. Grundmann Tel.: 3432. Sprechstunde: Montag, 9–10 M 613
e-mail: Waldemar.Grundmann@uni-dortmund.de
A. Kaplun Tel.: 3437 Sprechstunde: Mittwoch, 13–14.30 M 634
e-mail: Alexander.Kaplun@uni-dortmund.de
K. Kosfeld Tel.: 5917 Sprechstunde: Dienstag, 12–13 M 630
e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de