

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) WS 2008

Blatt 7 (Markoff Ketten)

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben nach Möglichkeit schriftlich. Es können nicht alle Aufgaben in den Übungen besprochen werden.

Aufgabe 28 In a) sei P die Übergangsmatrix eines Erneuerungsprozesses, in b) sei Q eine Übergangsmatrix, die zu einem *Labyrinth mit Ratte* gehört:

$$\text{a) } P = \begin{pmatrix} q_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & p_2 & 0 & 0 \\ q_3 & 0 & 0 & p_3 & 0 \\ q_4 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zu b) Geben Sie auch das Labyrinth an.

In welchem Raum sollte man die Rattenfalle aufstellen?

Aufgabe 29 *Ehrenfest Diffusionsmodell.* Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Teilchen, die sich in einem durch eine durchlässige Membran in zwei gleich große Hälften geteilten Gefäß befinden. ξ_k sei die Anzahl der Teilchen in der rechten Gefäßhälfte zur Zeit k . Falls sich zur Zeit k in der rechten Hälfte i Teilchen befinden, sei die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen von rechts nach links wechselt i/n und die Wahrscheinlichkeit von links nach rechts zu wechseln sei $(n-i)/n$. Dies gilt für $1 \leq i \leq n-1$. Ist $\xi_k = 0$ (bzw. $\xi_k = n$) so ist mit Wahrscheinlichkeit 1 zum nächsten Zeitpunkt $\xi_{k+1} = 1$ (bzw. $\xi_{k+1} = n-1$). (Reflektierende Zustände.)

a) Stellen Sie die Übergangsmatrix und den Übergangsgraphen auf. Zeigen Sie, daß durch $\vec{\pi} = \left(\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} : 0 \leq k \leq n \right)$ – also die Binomialverteilung mit $p = q = 1/2$ – eine invariante Verteilung gegeben ist.

b) Geben Sie dazu ein passendes Urnenmodell an.

c) Interpretieren Sie das Ergebnis für **c1)** *kleine* bzw. **c2)** *große* Teilchenzahlen n . Die Erfahrung lehrt, daß letztendlich in den beiden Hälften gleich viel Teilchen sein werden. Gilt dies auch in diesem Modell?

Aufgabe 30 HAPPY HARRY

Happy Harry ist ein zerstreuter Professor. Er besitzt zwei Regenschirme, die er in seiner Wohnung und in seinem Institut deponiert hat. Regnet es und ist Happy Harry unterwegs zur Wohnung oder zur Arbeit, dann nimmt er einen Schirm mit, sofern vorhanden. Harry ist sehr zerstreut und achtet nicht darauf, daß stets ein Schirm an jedem Ort ist. Es regnet mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ und Happy Harry geht täglich zu Fuß zur Arbeit oder nach Hause, unabhängig vom Wetter.

a) Sei $\xi_n : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2\}$ die Zufallsvariable, die angibt, wie viele Schirme sich zur Zeit n an Harrys Aufenthaltsort befinden. Zeigen Sie: $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bildet eine homogene Markoffkette. (Begründen Sie die Markoffeigenschaft!) Stellen Sie den Übergangsgraphen auf.

b) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix P und geben Sie die ersten Potenzen an. Ist der Satz von Markoff anwendbar?

c) Bestimmen Sie die invarianten Verteilungen.

d) Soviel Zerstreutheit kann sich rächen: Vor dem ersten Gang zum Institut hat-

te Harry 2 Schirme in seiner Wohnung. Gegen welchen Grenzwert konvergiert die Wahrscheinlichkeit, daß Harry ohne Schirm unterwegs ist?

e) Gegen welchen Grenzwert konvergiert die Wahrscheinlichkeit, daß H.H. naß wird? Benutzen Sie in e) den Begriff der Unabhängigkeit: Zwei Ereignisse A, B sind unabhängig, falls $W(A \cap B) = W(A) \cdot W(B)$ gilt. Die Ereignisse $A := \{ \text{Harry hat } k \text{ Schirme im Büro} \}$ und $B := \{ \text{es regnet} \}$ können als unabhängig angesehen werden. f) Haraldine schenkt Harry zu Weihnachten einen weiteren Regenschirm. Sei $\xi_n : \Omega \rightarrow \{0, \dots, 3\}$ wie oben definiert. Bearbeiten Sie die Aufgabenteile a)–e) in diesem Fall.

Aufgabe 31 RUIN EINES SPIELERS.

Ein Spieler spielt ein faires Glückspiel, bei dem der Einsatz in jeder Spielrunde 1 Euro beträgt. a sei das Startkapital, $\xi_i \in \{-1, 1\}$ bezeichne den "Gewinn" bei der i -ten Runde. $Z_n = Z_n(a)$ bezeichne das Kapital des Spielers nach n Runden. Der Spieler benötigt ein Kapital von $b > a$ Euro, und er ist nicht kreditwürdig. Daher wird das Spiel beendet, sobald Z_n den Wert 0 oder b erreicht. (Absorbierende Zustände)

- Geben Sie den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix an.
- Bestimmen Sie die invarianten Verteilungen. Ist der Satz von Markoff anwendbar?
- Sei $R = R(a) := \{\exists n \in \mathbb{N} : Z_n = 0\}$, mit $W(R)$ werde die Ruinwahrscheinlichkeit bezeichnet. Zeigen Sie, daß folgende Relation gilt:

$$W(R|Z_m = k) = \frac{1}{2} (W(R|Z_m = k + 1) + W(R|Z_m = k - 1))$$

für alle $k \in \{1, \dots, b - 1\}$ (unabhängig von m).

Folgern Sie daraus: $W(R|Z_m = a) = 1 - a/b$.

- Beschreiben Sie – z.B. für $b = 4$ – das Grenzverhalten der Markoffkette Z_n bei gegebenem Startkapital $a \in \{0, \dots, b\}$.

Aufgabe 32 Betrachten Sie eine zeitlich homogene Markoffkette auf dem Zustandsraum $\{1, \dots, N\}$, deren Übergangswahrscheinlichkeit eine Dreibandmatrix ist, wobei die Ränder 1 und N totalreflektierende Zustände sind. Geben Sie den Übergangsgraphen an.

- In den Zeilen $2 \leq i \leq N - 1$ seien die Koeffizienten $p_{i,i-1}, p_{i,i}, p_{i,i+1} \neq 0$. Ist der Satz von Markoff anwendbar?
- Bestimmen Sie die invarianten Verteilungen. Betrachten Sie zunächst den Spezialfall $N = 5, p_{i,i-1} = p, p_{i,i} = r, p_{i,i+1} = q, p + q + r = 1, 2 < i < 4$.
- Versuchen Sie für das in der Vorlesung skizzierte Diffusionsmodell (*zwei Hunde mit a roten bzw. b schwarzen Flöhen treffen sich regelmäßig*) die invarianten Verteilungen zu bestimmen. (Betrachten Sie insbesondere den Spezialfall $a = b$.)

Aufgabe 33 (X_n) sei eine zeitlich homogene Markoff Kette auf dem Zustandsraum $\{0, \dots, 4\}$. Die Kette starte in $X_0 = 1$ und habe die Übergangsmatrix $P :=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Geben Sie den Übergangsgraphen an.
- Geben Sie die Verteilungen $\bar{p}^{(i)}$ für $0 \leq i \leq 3$ an.
- Bestimmen Sie die invarianten Verteilungen. Ist der Satz von Markoff anwendbar?
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß die Kette den (absorbierenden) Zustand 4 irgendwann erreicht.

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß die Kette X_n für $0 \leq n \leq N$ die Friedhöfe 0 und 4 nicht erreicht.

Aufgabe 34 Eine Stadt hat 7 Brücken (siehe Skizze), die die einzelnen Stadtteile verbinden. Eine Kutsche, die durch die Stadt fährt, kann als Markoffkette aufgefaßt werden, deren Zustandsraum die Stadtteile A, B, C, D, E sind. (C und E seien durch keine Brücke, sondern durch eine in beiden Richtungen befahrbare Straße verbunden.) Der Kutscher wählt, wenn er sich in einem Stadtteil befindet, eine der möglichen Verbindungen in einen anderen Stadtteil, jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Stellen Sie den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix auf.

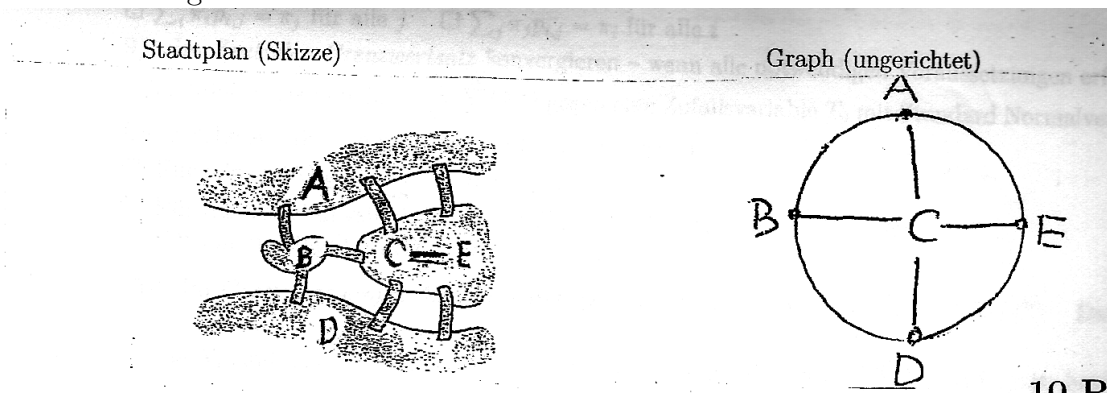
a) Was läßt sich über das Langzeitverhalten der Wahrscheinlichkeiten, daß sich die Kutsche im Stadtteil $A, B, \dots$ befindet, aussagen?

b) Die Stadtverwaltung beschließt, ein Einbahnsystem einzuführen: Und zwar seien die Wege $A \rightarrow B, B \rightarrow D, D \rightarrow E, E \rightarrow A, A \rightarrow C, C \rightarrow D, B \rightarrow C, E \rightarrow C$ Einbahnen.

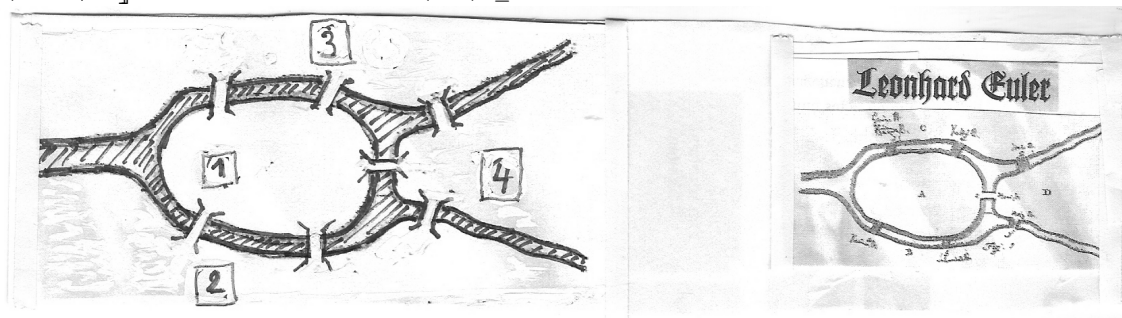
c) Das Verkehrsamt erhält einen neuen Leiter. Der entscheidet, daß die Richtung einer Einbahn geändert wird: $D \rightarrow C$ statt $C \rightarrow D$.

d) Nach negativen Erfahrungen kehrt man zunächst zurück zum Verkehrsplan b). Dann werden Fußgängerzonen eingerichtet: Die Brücken zwischen B und C sowie B und D werden für Kutschen gesperrt, dagegen wird die Brücke von B nach A in beiden Richtungen für den Verkehr freigegeben.

Geben Sie in b) – d) die Ü-Graphen und die Ü-Matrizen an und bestimmen Sie jeweils das Langzeitverhalten.



Aufgabe 35 Die vier Stadtteile von Königsberg – hier der Einfachheit halber mit $\boxed{1}$, $\dots$, $\boxed{4}$ bezeichnet – wurden zu Zeiten L. Eulers durch insgesamt 7 Brücken verbunden. (Siehe Skizze.) Ein Spaziergänger (meinetwegen auch eine Kutsche), die sich im Stadtteil $\boxed{n}$ befindet, wechselt zu jedem Zeitpunkt k über eine der Brücken in einen anderen Stadtteil $\boxed{m}$, wobei jede mögliche Brücke mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Die Zufallsvariable X_k gibt die Stadtteilnummer an, in der sich der Spaziergänger zum Zeitpunkt k befindet. [Z.B. $W(X_{k+1} = 2 | X_k = 1) = 2/5$] Die Zufallsvariablen $(X_k)_{1 \leq k}$ bilden eine zeitlich homogene Markoff Kette.



a) Geben Sie a1) den Übergangsgraphen und a2) die Übergangsmatrix P an.

b) Bestimmen Sie die invarianten Verteilungen. $\llbracket$ **Kontrolle:** $\frac{1}{14} (5|3|3|3)$ ist eine invariante Verteilung. $\rrbracket$

c) Geben Sie die Zweischrittübergangsmatrix an.

d1) Beschreiben Sie das Verhalten der Wahrscheinlichkeiten $(W(X_n = 1))_{n \geq 1}$ für $n \rightarrow \infty$, wenn bekannt ist, daß sich der Spaziergänger beim Start im Stadtteil $\boxed{1}$ aufhielt?

d2) Wie verändert sich das Langzeitverhalten der Markoffkette, wenn man voraussetzt, daß der Spaziergänger im Stadtteil $\boxed{4}$ startete?

Aufgabe 36 Im Zoo der Stadt D. wird das moderne Primatenhaus *Pentagon* gebaut: Um die Affen zu intellektueller und sportlicher Aktivität zu animieren, besteht das Haus aus einem Labyrinth von 5 Räumen A, ..., E, bei denen die Türen jeweils nur in einer Richtung passiert werden können. (Skizze I). Ein (idealer) Affe wählt in dem Raum, in dem er sich befindet, eine der passierbaren Türen, ohne Präferenz – also jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit – und verläßt zum nächsten Zeittakt den Raum.

Die Zufallsvariablen X_i , die den Aufenthaltsort eines (fest gewählten) Affen zur Zeit i angeben, bilden eine zeitlich homogene Markoff Kette mit Zustandsraum $\{A, \dots, E\}$.

I. a) Geben Sie a1) den Übergangsgraphen und a2) die Übergangsmatrix P an.

b) Bestimmen Sie die invarianten Verteilungen. $\llbracket$ **Kontrolle:** $\vec{\pi} = \frac{1}{29} (4|2|7|8|8)$ $\rrbracket$

II. c) Ein rabiates Silberrückenmännchen demolitiert die Verbindungstür von E nach A, die Tür bleibt verschlossen (siehe Skizze II). Geben Sie für die neue Markoffkette $(\tilde{X}_n)$

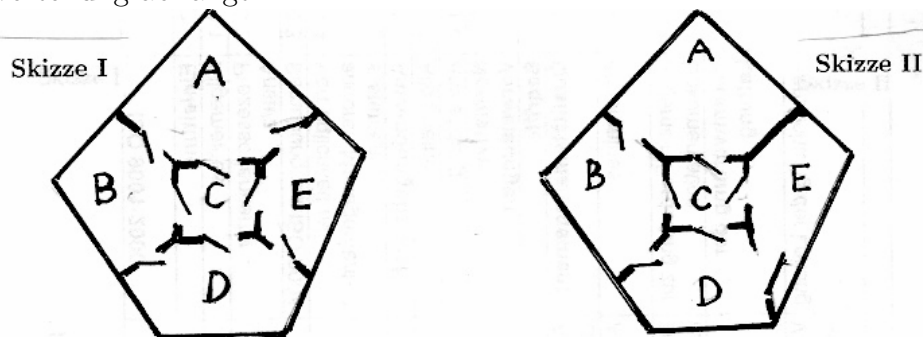
c1) die Übergangsmatrix $\tilde{P}$ und c2) die invarianten Verteilungen an.

d1) Konvergieren die Wahrscheinlichkeiten $(W(\tilde{X}_n = C))_{n \geq 1}$ (für die neue Markoff Kette), wenn sich der Affe beim Start im Raum D aufhielt?

d2) Beschreiben Sie das Langzeitverhalten der neuen Markoffkette.

e) e1) Geben Sie die für die Markoffkette $(\tilde{X}_n)$ in II die Ergodenmatrix $\tilde{Q}$ an.

e2) Zeigen Sie für diese Kette, daß im Mittelergodensatz der Grenzwert nicht von der Startverteilung abhängt.



Abgabe: in den Kästen im Foyer bis Freitag, 23 .5.06 12 Uhr
Sprechstunden im SoSe 2008

W. Hazod: Tel.: 3055. Sprechstunde: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627

e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de

Übungsleiter: W. Grundmann, A. Kaplun, K. Kosfeld