Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

20.05.2008

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) WS 2008
Blatt 8

Aufgabe 37 $\xi : \Omega \to \mathbb{R}_+$ sei eine Zufallsvariable (Lebensdauer) mit Verteilungsfunktion F, Schwanz R und Dichte f, die durch die Hazardrate (Ausfallrate) h resp. die Hazardfunktion H beschrieben sind. $x \mapsto F_t(x) := W(\xi \le x+t | \xi \ge t),\ t > 0$, bezeichne die Überlebens-Verteilungsfunktionen, $R_t := 1 - F_t : x \mapsto W(\xi > t+x | \xi > t)$.
a) Warum muß für eine Hazardfunktion gelten: $H(t) := \int_0^t h(x)dx \xrightarrow{t\to\infty} \infty$?
b) Wie muß h bzw. H beschaffen sein, damit $t \mapsto F_t(\cdot)$ (*) monoton (wachsend resp. fallend) ist?
c) Sei ξ die Lebensdauer eines technischen Geräts mit Ausfallrate h. Wie kann man Monotonie (*) in Teil b) interpretieren? Gibt es Situationen in denen $\uparrow$ oder $\downarrow$ in (*) plausibel ist?
d) $X_i \ge 0$ seien unabhängige Zufallsvariablen, deren Verteilungen durch die Hazardraten h_i gegeben sind, $i = 1, 2$. Sei $Y := \min(X_1, X_2)$. Geben Sie die Hazardrate von Y an. Geben Sie Beispiele X_1, X_2, Y an, bei denen die Hazardraten h_i monoton sind, aber die Hazardrate von Y diese Eigenschaft nicht besitzt.

Aufgabe 38 a) In einer Urne befinden sich weiße, schwarze und rote Kugeln, die Mischungsverhältnisse seien p, q, r $(0 < p, q, r;\ p + q + r = 1)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach n Zügen mit Zurücklegen k_1 weiße, k_2 schwarze und k_3 rote Kugeln gezogen zu haben? $(k_i \in \mathbb{Z}_+,\ k_1 + k_2 + k_3 = n)$
b) Die Mischungsverhältnisse p, q, r seien unbekannt, n sei fest. Es werden bei einem Versuch k_1^* weiße, k_2^* schwarze und k_3^* rote Kugeln gezogen, $\sum k_i^* = n$. Schätzen Sie p, q, r aufgrund dieser Beobachtung mittels der M-L Methode.
c) Seien $\xi_i, 1 \le i \le n$ Zufallsvariable mit Werten in $\{w, s, r\}$, die die Farbe der Kugel beim $i-$ten Zug angeben. Bestimmen Sie die Verteilung von ξ_i. Warum kann man voraussetzen, daß die ξ_i unabhängig sind? Bestimmen Sie die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit mittels der (unabhängigen) Zufallsvariablen ξ_i.

Aufgabe 39 *Hardy Weinberg Gesetz.* a, b seien Allele eines bestimmten Gens. Die Genotypen aa, ab, bb – es wird nicht zwischen ab und ba unterschieden – treten mit folgenden Wahrscheinlichkeiten auf:

$$W_p(aa) = p^2, \quad W_p(ab) = 2 \cdot p \cdot (1-p)\,, \quad W_p(bb) = (1-p)^2 \qquad (*)$$

mit unbekanntem $0 \le p \le 1$. Bei einer unabhängigen Stichprobe vom Umfang N wurden aa, ab und bb mit den Häufigkeiten n_1, n_2, n_3 beobachtet, $n_1 + n_2 + n_3 = N$.
a) Geben Sie die Likelihoodfunktion und die log-Likelihoodfunktion an.
b) Schätzen Sie den Parameter p mit der Maximum-Likelihood Methode.
$[\![$ Um welchen Verteilungstyp handelt es sich in (*) ? $]\!]$

Aufgabe 40
a) Beim *dreifachen* Münzwurf bezeichnen A_1, A_2, A_3 die folgenden Ereignisse:
$A_1 := \{$ mindestens zwei Wappen$\}$, $A_3 := \quad = A$, $A_2 := \{$erster Wurf Kopf$\}$.
Zeigen Sie, daß zwar $W(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = W(A_1) \cdot W(A_2) \cdot W(A_3)$ gilt, daß aber die Ereignisse *nicht unabhängig* sind. Sind sie paarweise unabhängig?
b) Beim *zweifachen* Münzwurf bezeichne
$A_1 := \{$ beim ersten Wurf Wappen$\}$, $A_2 := \{$ zweiter Wurf Wappen$\}$,

$A_3 := \{$zwei verschiedene Ereignisse, (d.h. (Kopf, Wappen) oder (Wappen, Kopf)) $\}$.
Zeigen Sie, daß die Ereignisse *paarweise* unabhängig, aber *nicht* unabhängig sind.

Aufgabe 41 Sei (Ω, Σ, W) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $A_1, \ldots A_N \in \Sigma$. Die Mengen $\{A_i\}$ besitzen die *Produkt-Eigenschaft*, falls gilt:

$$W(\bigcap_1^N A_i) = \prod_1^N W(A_i) \qquad (*)$$

a) Zeigen Sie: $A_1, \ldots, A_N$ sind unabhängig (bez. W) genau dann wenn $\{B_1, \ldots, B_N\}$ (*) erfüllen für alle $B_i \in \Sigma(A_i) := \{\emptyset, \Omega, A_i, \complement A_i\}$.
b) Seien $\mathfrak{E}_i : i \in I$, Mengensysteme in Σ mit $\Omega \in \mathfrak{E}_i$ für alle $i \in I$.
Zeigen Sie: $\{\mathfrak{E}_i : i \in I\}$ sind unabhängig (bez. W) genau dann wenn für jede *endliche* Teilmenge $J = \{i_1 \ldots, i_N\} \subseteq I$ und für jede Auswahl $A_{i_1} \in \mathfrak{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_N} \in \mathfrak{E}_{i_N}$ die Mengen $\{A_{i_j}, j = 1 \ldots N\}$ die Eigenschaft (*) besitzen.
c) Seien $\{X_i, i \in I\}$ reelle Zufallsvariable. Zeigen Sie:
Die ZV sind genau dann unabhängig (bez. W), wenn für jede *endliche* Teilmenge $J = \{i_1 \ldots, i_N\} \subseteq I$ und für jede Auswahl von Borelmengen $A_1, \ldots, A_N \in \mathfrak{B}^1$ die Mengen $\{\{X_{i_j} \in A_j\},\ j = 1 \ldots, N\}$ (*) erfüllen.
d) Es gilt (mit den Bezeichnungen von c)) das folgende Kriterium :
Die ZV sind genau dann unabhängig (bez. W), wenn für jede *endliche* Teilmenge $J = \{i_1 \ldots, i_N\} \subseteq I$ und für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ gilt:

$$W(X_{i_1} \leq x_1, \ldots, X_{i_N} \leq x_N) = \prod_{j=1}^N W(X_{i_j} \leq x_j) \qquad (\star\star)$$

e) Interpretieren Sie die Eigenschaft $(\star\star)$ im Kontext von Verteilungsfunktionen für $I = \{1, \ldots, N\}$. ($\vec{x} \mapsto F_{X_1,\ldots,X_N}(\vec{x}) := W(X_1 \leq x_1, \ldots, X_N \leq x_N)$ bezeichne dabei die *Verteilungsfunktion des Zufallsvektors* $\vec{X} := (X_1, \ldots, X_N)$ (bzw. der *gemeinsamen Verteilung* der Komponenten).
f) Seien $\Omega, \Lambda \neq \emptyset$, sei $X : \Omega \to \Lambda$ eine Abbildung. $\mathfrak{E} \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$ sei ein Mengensystem. Weiter seien $\mathfrak{S} := \Sigma(\mathfrak{E})$ und $\mathfrak{A} := \Sigma(X^{-1}(\mathfrak{E}))$ die von $\mathfrak{E}$ und $X^{-1}(\mathfrak{E})$ erzeugten $\sigma-$Algebren. Zeigen Sie:
$X^{-1}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{A}$, m.a.W. $X^{-1}(\Sigma(\mathfrak{E})) = \Sigma(X^{-1}(\mathfrak{E}))$.
$[\![$ Zeigen Sie zunächst für jede $\sigma-$Algebra $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, daß $\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{P}(\Lambda) : X^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$ eine σ-Algebra in $\mathcal{P}(\Lambda)$ ist. (Vgl. Vorlesung, 7.2) $]\!]$
g) Wiederholen Sie den Beweis aus der Vorlesung: *Ein durchschnittstabiles Dynkinsystem ist eine $\sigma-$Algebra.*

Abgabe: in den Kästen im Foyer bis Freitag, 30 .5.06 12 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2008

W. Hazod: Tel.: 3055. Sprechstunde: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627
e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de

Übungsleiter:

W. Grundmann *Tel.: 3432. Sprechstunde: Montag, 9–10 M 613*
e-mail: Waldemar.Grundmann@uni-dortmund.de

A. Kaplun *Tel.: 3437 Sprechstunde: Mittwoch, 13–14.30 M 634*
e-mail: Alexander.Kaplun@uni-dortmund.de

K. Kosfeld *Tel.: 5917 Sprechstunde: Dienstag, 12–13 M 630*
e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de