Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod 23.05.2008

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) WS 2008
Blatt 9

Aufgabe 42 Sei $\mathcal{K} := \{\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Kreisscheibe und $\mathcal{R}$ sei das Rechteck $\mathcal{R} := [0, 1] \otimes [0, 2\pi]$. T sei die Abbildung
$\mathcal{R} \ni (r, \alpha) \mapsto \vec{x} = (r \cdot \cos\alpha, r \cdot \sin\alpha) \in \mathcal{K}$. *(Polarkoordinaten)*
Die Restriktion $T : \mathcal{R}^* := \mathcal{R} \backslash \Big(\{0\} \otimes [0, 2\pi] \cup [0, 1] \otimes \{2\pi\} \to \mathcal{K} \backslash \{\vec{0}\}\Big) =: \mathcal{K}^*$ ist bekanntlich bijektiv und – abgesehen vom Rand – stetig differenzierbar. Bestimmen Sie die Verteilungsdichten von $T(\gamma_{\mathcal{R}})$ bzw. von $T^{-1}(\gamma_{\mathcal{K}})$ wobei $\gamma_{\mathcal{K}}$, $\gamma_{\mathcal{R}}$ die Gleichverteilungen auf $\mathcal{K}$ und $\mathcal{R}$ bezeichnen.
$\Big[\!\Big[$ Beachten Sie, daß $\gamma_{\mathcal{R}} = \gamma_{\mathcal{R}^*}$ und $\gamma_{\mathcal{K}} = \gamma_{\mathcal{K}*}$ gelten $\Big]\!\Big]$.

Aufgabe 43 ξ_1, ξ_2 seien relle Zufallsvariable, deren gemeinsame Verteilung eine Dichte f habe. Seien $\varphi := \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \xi_2)$ und $\psi := \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \xi_2)$. Bestimmen Sie die Verteilungsdichte g der gemeinsamen Verteilung von (φ, ψ). Dabei sei
a) $f(x, y) := c \cdot 1_{[0,b]\otimes[0,d]}(x, y)$ (für ein $c = c(b, d) > 0$)
b) $f(x, y) := \alpha \cdot \beta \cdot \exp(-\alpha \cdot x - \beta \cdot y) \cdot 1_{\mathcal{R}}(x, y)$ (für $\alpha, \beta > 0$ und $\mathcal{R} := \{(x, y) : x, y \geq 0)$
Zeigen Sie, daß in a) und b) (ξ_1, ξ_2) unabhängig sind, aber (φ, ψ) nicht unabhängig sind.
c) Nun sei $f(x, y) := \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2))$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß in diesem Fall sowohl (ξ_1, ξ_2) als auch (φ, ψ) unabhängig sind.
$\Big[\!\Big[$ Benutzen Sie eine Darstellung $(\varphi, \psi) = T(\xi_1, \xi_2)$ für eine geeignete Transformation T. Vergleichen Sie die Skizzen der Vorlesung. $\Big]\!\Big]$

Aufgabe 44 (φ, ψ) sei ein Zufallsvektor, dessen Verteilung μ eine Dichte
$f : (x, y) \mapsto 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \exp(-\alpha \cdot (x + y)) \cdot \exp(-\beta \cdot (x - y)) \cdot 1_{\mathcal{S}}(x, y)$ besitzt. Dabei sind $\alpha, \beta > 0$ und $\mathcal{S} := \{(x, y) : x + y \geq 0, x - y \geq 0\}$.
Geben Sie die Dichten von
a) $\psi + \varphi$ **b)** ψ/φ und **c)** $\psi \cdot \varphi$ auf $\mathbb{R}$ an. $\Big[\!\Big[$ Es genügt, Formeln abzuleiten! $\Big]\!\Big]$
d) Sei die Dichte von $\vec{X} := (\xi, \eta)$ die Gleichverteilung auf $[0, 1]^2$. Geben Sie die Dichten der Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen an:
d1) $\xi + \eta$, $\xi - \eta$ **d2)** ξ/η **d3)** $\xi \cdot \eta$ **d4)** $\xi \vee \eta$ **d5)** $\xi \wedge \eta$.

Aufgabe 45 Die reelle Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ beschreibe die Zeit des störungsfreien Betriebs eines technischen Geräts, Y gebe die Dauer einer Reparatur des Gerätes nach einer Störung an. Dann sei $Z := \frac{X}{X+Y}$ die relative störungsfreie Zeit. Die gemeinsame Verteilung von (X, Y) besitze eine Dichte f.
a) Geben Sie die Dichte von $\frac{X}{Y}$ an.
b) Leiten Sie daraus eine Formel für die Dichte von Z ab. (Zeigen Sie zunächst für die Verteilungsfunktionen: $F_Z(z) = F_{\frac{X}{Y}}(\frac{z}{1-z}) = 1 - F_{\frac{Y}{X}}(\frac{1-z}{z})$ $0 < z < 1$.)

Aufgabe 46 *Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung*
Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ eines Moleküls sei ein Zufallsvektor, dessen Komponenten unabhängig sind und nach einer Normalverteilung N_{0,σ^2} verteilt sind. $\Big[\!\!\Big[$ Dabei sei $\sigma^2 = kT/M$, $k :=$ Boltzmannsche Konstante, $T :=$ absolute Temperatur und $M :=$ Masse.$\Big]\!\!\Big]$ Bestimmen Sie die Dichte der Verteilung der Länge des Vektors

$$R = ||\vec{X}||_2 = \left(\sum_1^3 X_i^2\right)^{1/2}$$

$\Big[\!\!\Big[$ Bestimmen Sie zunächst die Verteilung von $R^2 = \sum X_i^2$ (Faltung!).
Zur Kontrolle. Die Dichte von R lautet: $x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma^{-3} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ $\Big]\!\!\Big]$

Abgabe: in den Kästen im Foyer bis Freitag, 6.6.06 12 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2008

W. Hazod: Tel.: 3055. Sprechstunde: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627
e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de

Übungsleiter:

W. Grundmann *Tel.: 3432. Sprechstunde: Montag, 9–10 M 613*
e-mail: Waldemar.Grundmann@uni-dortmund.de
A. Kaplun *Tel.: 3437 Sprechstunde: Mittwoch, 13–14.30 M 634*
e-mail: Alexander.Kaplun@uni-dortmund.de
K. Kosfeld *Tel.: 5917 Sprechstunde: Dienstag, 12–13 M 630*
e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de