

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) WS 2008
Blatt 10

Aufgabe 47 a) Seien $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ unabhängige reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktionen $F_{X_i} =: F_i$ und Schwänzen $R_{X_i} =: R_i$, $1 \leq i \leq N$. Die Verteilungen besitzen Dichten f_i . Zeigen Sie: Die Verteilung der ZV $Y := \min_{1 \leq i \leq N} X_i$ besitzt eine Dichte, die durch

$$g := \prod_1^N R_i \cdot \sum_1^N \frac{f_i}{R_i} \quad \text{gegeben ist.}$$

b) Betrachten Sie den Spezialfall exponentialverteilter ZV mit

$$F_i(x) := (1 - \exp(-\alpha_i \cdot x)) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \quad (\text{wobei } \alpha_i > 0).$$

c) Ein Projekt besteht aus 5 Teilprojekten P_1, \dots, P_5 , die von verschiedenen voneinander unabhängigen Arbeitsgruppen durchgeführt werden. Die Arbeit an den Teilprojekten P_2 bzw. P_5 kann erst begonnen werden, wenn P_1 bzw. P_4 beendet sind. Die Bearbeitungsdauer T_i des Projektes P_i sei auf $[0, t_i]$ gleichverteilt. Geben Sie die Verteilungsfunktion der Dauer des Gesamtprojekts an. (Es genügt, eine Formel abzuleiten).

[[Fertigen Sie eine Skizze des Arbeitsplans an! Bestimmen Sie zunächst die Dauer der Teilprojekte $\{P_1, P_2\}$ und $\{P_4, P_5\}$]]

Aufgabe 48 Schriftlich bearbeiten a) Zeigen Sie: Für die Verteilungsfunktion $B_{n,p}$ einer Binomialverteilung

$$\beta(n, p) \text{ gilt: } 1 - B_{n,p}(k-1) = \sum_{j=k}^n \beta(n, p)(j) = k \cdot \binom{n}{k} \int_0^p t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt$$

(Das Integral ist als *unvollständige Beta-Funktion* bekannt).

[[Differenzieren Sie die linke Seite nach p , $0 < p < 1$]]

b) *Ordnungsstatistiken* Sei $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ein Vektor in \mathbb{R}^n . Durch Permutation der Indices erhält man ein geordnetes Tupel. Dessen Komponenten werden mit $(x_{1:n}, \dots, x_{k:n}, \dots, x_{n:n})$ bezeichnet. Verifizieren Sie zunächst für $r \in \mathbb{R}$:

$$\{\vec{x} : x_{k:n} \leq r\} = \left\{ \vec{x} : \sum_1^n \mathbf{1}_{(-\infty, r]}(x_i) \geq k \right\}$$

c) Seien X_1, \dots, X_n unabhängige reelle ZV mit Verteilung $X_i(W) =: \mu$. Die Verteilungsfunktion sei mit $F = F_\mu$ bezeichnet. Dann sind für festes $r \in \mathbb{R}$ die Zufallsvariablen $\{Y_i := \mathbf{1}_{(-\infty, r]}(X_i), 1 \leq i \leq n\}$ unabhängig verteilt nach einer Binomialverteilung $\beta(1, F(r))$.

Bestimmen Sie die Verteilung von $Z := \sum_1^n Y_i$.

d) Folgern Sie daraus: $X_{k:n}$ hat die Verteilungsfunktion

$$F_{k:n} : r \mapsto W(X_{k:n} \leq r) = k \cdot \binom{n}{k} \int_0^{F(r)} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt$$

[[Beachten Sie a)]]

e) Zeigen Sie, daß daraus folgt: Falls μ eine Dichte f besitzt, so besitzt $X_{k:n}(W)$ die Dichte $f_{k:n} : x \mapsto k \cdot \binom{n}{k} f(x) \cdot F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k}$.

Aufgabe 49 ξ sei eine nicht negative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und Schwanz $R = 1 - F$. Es sei $\mathbb{E}(\xi) < \infty$.

a) ξ sei \mathbb{Z}_+ -wertig. Dann gelten:

a1) $k \cdot R(k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$

a2) $\mathbb{E}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} R(k)$

b) Die Verteilung von ξ besitze eine Dichte f . Dann gelten:

b1) $x \cdot R(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$

b2) $\mathbb{E}(\xi) = \int_0^{\infty} R(x) dx$

[[Umordnen in a2), Satz von Fubini in b2)]]

Aufgabe 50 Vgl. Blatt 5, Aufgabe 23 Bei der Herstellung von Fußbällen ist der Radius \mathcal{R} produktionsbedingt zufälligen Schwankungen unterworfen, und zwar ist \mathcal{R} in einem Intervall $[R_0 - \epsilon, R_0 + \epsilon]$ gleichverteilt. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz

a) des Radius \mathcal{R} , b) der Oberfläche \mathcal{O} und c) des Volumens \mathcal{V} .

[[Formeln für Oberfläche und Volumen: $O(r) = 4r^2\pi$, $V(r) = \frac{4r^3\pi}{3}$]]

d) Der "Hausverstand" könnte zu dem Ansatz $\mathbb{E}(\mathcal{V}) = \frac{4(\mathbb{E}(\mathcal{R}))^3 \cdot \pi}{3}$ führen. Ist dies sinnvoll?

Aufgabe 51 A) Bestimmen Sie den Erwartungswert folgender Verteilungen (vgl. Blatt 4, A 19):

a) Gleichverteilung b) Geometrische Verteilung. c) Dreieckverteilung d) Weibullverteilung

e) Betaverteilung f) Paretoverteilung g) Potenz-Verteilung h) Maxwellverteilung

i) Laplaceverteilung (mit Dichte $x \mapsto \frac{\lambda}{2} \cdot \exp(-\lambda \cdot |x|)$)

[[Zum Teil läßt sich Aufgabe 49) benutzen. Es wäre sinnvoll, sich die Definition der Γ -Funktion in Erinnerung zu rufen!]]

B) Sei $\vec{X} := (X_1, X_2)$ ein zufälliger Vektor mit Werten in \mathbb{Z}^2 mit diskreter (gemeinsamer) Verteilung $\sum_{i,j \in \mathbb{Z}^2} p(i, j) \cdot \epsilon_{i,j}$. Dabei sind die Werte $p(i, j)$; $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4$ der folgenden

Tabelle zu entnehmen: $\begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}$. (Alle übrigen $p(i, j) = 0$.)

Bestimmen Sie

a) die Verteilungen von X_1 und X_2 ,

b) deren Erwartungswerte und Varianzen,

c) die Kovarianz $\text{Cov}(X_1, X_2)$ und

d) den Korrelationskoeffizienten $\rho(X_1, X_2)$.

Abgabe: in den Kästen im Foyer bis Freitag, 6.6.06 12 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2008

W. Hazod: Tel.: 3055. Sprechstunde: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627

e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de

Übungsleiter:

W. Grundmann Tel.: 3432. Sprechstunde: Montag, 9-10 M 613

e-mail: Waldemar.Grundmann@uni-dortmund.de

A. Kaplun Tel.: 3437 Sprechstunde: Mittwoch, 13-14.30 M 634

e-mail: Alexander.Kaplun@uni-dortmund.de

K. Kosfeld Tel.: 5917 Sprechstunde: Dienstag, 12-13 M 630

e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de