

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) WS 2008 Blatt 11

Aufgabe 52 *Fingerübungen*

A X bezeichne eine reelle Zufallsvariable. Bestimmen Sie (1) Verteilung (2) Erwartungswert (3) Varianz, wenn X folgende Gestalt besitzt:

(a) $X \equiv c$ (für ein $c \in \mathbb{R}$), (b) $X = 1_A$ für ein $A \in \Sigma$ (c) $X = 1_A + 1_B$ für $A, B \in \Sigma$ (nicht notwendig disjunkt).

Sei $H_\alpha : x \mapsto \alpha \cdot x$. Sei $Y := H_\alpha(X)$. Bestimmen Sie – bei festem $\alpha \neq 0$ – in den Fällen (a), (b), (c) Verteilung, Erwartungswert und Varianz von Y .

B d) Seien $\xi_n \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$, d.h. meßbar. Dann sind (1) $\sup_n \xi_n$, (2) $\inf_n \xi_n$, (3) $\limsup_n \xi_n$, und (4) $\liminf_n \xi_n$ meßbar (eventuell $[-\infty, \infty]$ -wertig). Damit ist auch $\lim_n \xi_n$ meßbar, falls dieser existiert.

e) Zu 13.12, 13.14 Eine Funktion der Gestalt $\sum_n^\infty \alpha_i 1_{A_i}$ mit $A_i \in \Sigma$ (*) ist i.a. **nicht** abzählbarwertig. Im Gegenteil: Jede Funktion $f \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ ist von der Form (*).
[[Sei o.B.d.A. $f \geq 0$. Dann existieren $g_n \in \mathfrak{T}_\Sigma^+$ mit $g_n \nearrow f$. Daher $f = \sum(g_{n+1} - g_n)$]]

C Zu 13.15–13.17 **f)** Sei $\Omega := (0, 1]$, $W := \lambda^1|_{(0,1]}$. Seien $\xi_n := n \cdot 1_{(0,1/n]}$. Diskutieren Sie die Voraussetzungen in der Satzgruppe (B. Levi, Fatou, Lebesgue) anhand dieser Funktionen.

g) Analog für $\Omega := \mathbb{R}_+$, $W := E_1$ (Exponentialverteilung) und $f_n := e_n : x \mapsto^n \cdot e^{-nx} \cdot 1_{(0,\infty)}(x)$, die Dichten der Exponentialverteilungen E_n .

Aufgabe 53 Die Dauer eines Telefongesprächs kann als E_α -verteilte Zufallsvariable aufgefaßt werden. $x \mapsto K(x)$ sei die Kostenfunktion

$$K(x) := a \cdot 1_{(0,T_0]}(x) + (a + b(x - T_0)) \cdot 1_{(T_0,T_1]}(x) + (a + b(T_1 - T_0) + c(x - T_1)) \cdot 1_{(T_1,\infty)}(x)$$

(Die Kosten setzen sich zusammen aus einem Sockelbetrag der Höhe a , steigen linear mit Steigung b zwischen T_0 und T_1 und steigen (langsamer) mit Steigung $c (< b)$ ab T_1).

Berechnen Sie die mittleren Kosten eines Telefongesprächs.

Es wird ein neuer Quasseltarif eingeführt: Mit neuer Kostenfunktion $K_{\text{neu}}(x) := K(x)$ für $x \leq T_1$, und $:= K(T_1)$ für $x \geq T_1$. Berechnen Sie die mittleren Kosten für den neuen Tarif.

Aufgabe 54 Für eine $N_{0,1}$ -verteilte Zufallsvariable X zeige man, daß für $\eta > 0$ die folgenden Abschätzungen (für die rechten Schwänze) gelten:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\eta}{1 + \eta^2} \cdot \exp(-\eta^2/2) < W(\{X > \eta\}) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \exp(-\eta^2/2)$$

[[Für die rechte Ungleichung beachte man, daß $\int_\eta^\infty \exp(-x^2/2) dx < \frac{1}{\eta} \int_\eta^\infty x \exp(-x^2/2) dx$, die linke Ungleichung folgt ähnlich durch partielle Integration von $\int_\eta^\infty x^2 \cdot \exp(-x^2/2) dx$]]

Versuchen Sie damit eine Abschätzung der Schwänze $W(Y - a > \eta)$ einer N_{a,σ^2} -verteilten Zufallsvariablen Y zu finden.

Abgabe: in den Kästen im Foyer bis Freitag, 20.6.06 12 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2008

W. Hazod: Tel.: 3055. Sprechstunde: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627

Übungsleiter:

W. Grundmann Tel.: 3432. Sprechstunde: Montag, 9–10 M 613

A. Kaplun Tel.: 3437 Sprechstunde: Mittwoch, 13–14.30 M 634

K. Kosfeld Tel.: 5917 Sprechstunde: Dienstag, 12–13 M 630