Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

20.06.2008

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) SS 2008
Blatt 12

Aufgabe 55 *Fingerübungen* $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine konvexe Funktion, definiert auf einem Intervall I. D.h., $\forall (p_i \geq 0), \sum p_i = 1$, $\forall x_i \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi\left(\sum x_i p_i\right) \leq \sum p_i \varphi(x_i)$.

a) Beweisen Sie die Jensensche Ungleichung für eine Z.V. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit X und $\varphi \circ X \in \mathcal{L}^1$:

$$\varphi\left(\mathbb{E}(X)\right) \leq \mathbb{E}\left(\varphi(X)\right)$$

$\llbracket$ Betrachten Sie zunächst Treppenfunktionen X ! $\rrbracket$

b) Seien $0 < s \leq t$, betrachten Sie $\varphi : \mathbb{R}_+ \ni x \to x^{t/s}$ und zeigen Sie (mittels a)):

$$\mathbb{E}\left(|X|^t\right) \geq \mathbb{E}\left(|X|^s\right)^{t/s}$$

c) Sei $X = \overline{X}$ eine zentrierte Z.V. Beweisen Sie

$$\mathbb{E}\left(|X|^2\right)^{3/2} \leq \mathbb{E}\left(|X|^3\right), \quad \mathbb{E}\left(|X|^2\right)^{4/2} \leq \mathbb{E}\left(|X|^4\right)$$

d) Beweisen Sie mittels b) (mit $p := t/s,\ q := 1 - 1/p$) für reelle Zufallsvariable X, Y:

$$\mathbb{E}\left(|X \cdot Y|\right) \leq ||X||_p ||Y||_q$$

(Betrachten Sie speziell den Fall $p = q = 2$.)

Aufgabe 56 **a)** Wiederholen Sie den Beweis der Vorlesung: Seien ξ und η beide 0-1-wertige Zufallsvariable. Dann gilt: $(\xi,\ \eta)$ sind *unkorreliert*, genau dann, wenn sie *unabhängig* sind.
b) Seien $A, B, C \in \Sigma$, mit $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ und $0 < W(A), W(B) = W(C)$.
Dann sind $(\xi := 1_A,\ \eta := 1_B - 1_C)$ *unkorreliert*, aber *nicht unabhängig.*
c) Der Zufallsvektor $\vec{X} := (\xi_1, \xi_2)$ besitze eine Standard Normalverteilung $N_{0,I}$. Dann sind $(\xi_1,\ \xi_2)$ unabhängig. Es sei $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}, d)$ und $\vec{Y} = (\eta_1, \eta_2) := A\vec{X} = (\alpha\xi_1 + \beta\xi_2,\ \gamma\xi_1 + \delta\xi_2)$.
Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix $\mathrm{Cov}(\vec{Y}) = \left(\mathbb{E}(\eta_i \cdot \eta_j)\right)_{1 \leq i,j \leq 2}$.
Zeigen Sie: Die Gaußschen ZV $(\eta_1,\ \eta_2)$ sind *unkorreliert* genau dann, wenn sie *unabhängig* sind.

Aufgabe 57 Seien $\xi_i, i \geq 1$, unabhängige N_{a,σ^2}-verteilte Zufallsvariable. Mit S_n werde die Partialsumme $\sum_1^n \xi_i$ bezeichnet. Versuchen Sie, eine möglichst gute Abschätzung der (beidseitigen) Schwänze $W(|\frac{1}{n}S_n - a| > \epsilon)$ anzugeben. (Besser als die Ungleichungen, die in der Vorlesung bewiesen wurden).
a) Dazu beachte man (1), daß S_n nach einer Normalverteilung verteilt ist (Geben Sie die Parameter an)
(2), daß eine Normalverteilung ein affines Bild einer Standardnormalverteilung ist. Man kann das Problem also auf $N_{0,1}$ zurückführen. Beachten Sie A 54!)
b) Bestimmen Sie für eine $N_{0,1}-$verteilte Zufallsvariable die ersten 4 Momente. (Zeigen Sie, daß für eine $N_{0,1}-$verteilte ZV alle Momente existieren!)
c) Analog für eine $N_{a,\sigma^2}-$verteilte Z.V. Y.

Aufgabe 58 *(Auch schriftlich bearbeiten!)* Das Weimarer Würfelmännchen ist ein Würfel in der Form einer hockenden menschlichen Figur mit den Augen $1, \ldots, 6$. (Es ist nicht bekannt, ob er von J.W. Goethe benutzt wurde.)

a) Nach 150 Würfen (mit einem Replikat) beobachtet man folgendes Ergebnis:

4	3	5	3	5	2	4	6	3	2	3	6	5	4	3	3	4	2	5	5	3	4	5	5	5	2	2	6	5	5
5	4	2	4	4	2	5	3	3	3	2	4	4	4	3	4	2	2	4	4	4	3	5	1	2	5	2	3	2	2
5	2	5	1	4	5	2	6	3	1	1	5	2	3	5	5	3	1	3	3	6	4	3	3	5	5	5	5	2	5
4	5	3	2	2	4	2	6	3	2	2	2	5	3	3	3	2	3	4	6	5	4	1	5	6	2	5	4	3	2
5	6	5	4	6	4	3	2	3	6	5	6	5	2	3	5	5	2	1	3	4	5	2	3	3	4	3	5	3	6

Ist der Würfel annähernd ideal?
Geben Sie Schätzungen an für $p_i := W(\text{Augenzahl} = i)$ für $1 \leq i \leq 6$.
Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion der Augenzahl an.
Geben Sie Schätzungen für den Median und die Quartile der Augenzahl an.

b) Bei einem weiteren Versuch wurden nach 1500 Würfen folgende Ergebnisse erzielt:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl	68	332	341	257	361	131

Wie lautet nun die Antwort auf die Frage, ob der Würfel ideal ist?


Abgabe: in den Kästen im Foyer bis Freitag, 27.6.06 12 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2008

W. Hazod: Tel.: 3055. Sprechstunde: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627

Übungsleiter:

W. Grundmann *Tel.: 3432. Sprechstunde: Montag, 9–10 M 613*
A. Kaplun *Tel.: 3437 Sprechstunde: Mittwoch, 13–14.30 M 634*
K. Kosfeld *Tel.: 5917 Sprechstunde: Dienstag, 12–13 M 630*