Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) SS 2008
Blatt 13

Aufgabe 59 (Elemente der Stichprobentheorie) Es seien $\xi_0,\ \xi_i, 1 \le i \le n$, unabhängige reelle Zufallsvariable ("Stichproben") mit Verteilung $\xi_i(W) = \mu$, mit Erwartungswert $\mathbb{E}(\xi_i) = a$ und Varianz $\mathbb{V}(\xi_i) = \sigma^2 > 0$. Es existiere eine weitere Folge reeller Zufallsvariabler $\eta_0,\ \eta_i$ mit Verteilung ν, mit Verteilungsfunktion F, Erwartungswert $\mathbb{E}(\eta_i) = b$ und Varianz $\mathbb{V}(\eta_i) = \rho^2 > 0$. Dabei wird zusätzlich vorausgesetzt, daß die gemeinsame Verteilung von (ξ_i, η_i) gleich der Verteilung von (ξ_0, η_0) ist (für alle i) und daß die $\mathbb{R}^2$-wertigen Variablen $((\xi_i, \eta_i), 1 \le i \le n)$ unabhängig sind. Man definiert:

• $\overline{X}^{(n)} := \frac{1}{n} \cdot S_n$ (empirischer) **Mittelwert oder Stichprobenmittel**,
wobei $S_n := \sum_1^n \xi_i$ gesetzt wird. Analog sei der Mittelwert $\overline{Y}^{(n)}$ der Stichprobe (η_i) definiert.

• $\overline{V}^{(n)} := \frac{1}{n-1} \cdot T_n$ heißt die (empirische) **mittlere quadratische Abweichung**,
wobei $T_n := \sum_1^n \left(\xi_i - \overline{X}^{(n)}\right)^2$ gesetzt wird, und entsprechend sei die mittlere quadratische Abweichung der Stichprobe $(\eta_i, i \ge 0)$ definiert.

Die (empirischen) **Kovarianzen** der Stichproben $(\xi_i,\ \eta_i), i \ge 0$, definiert man als

• $\overline{C}^{(n)} := \frac{1}{n-1} \cdot R_n$,
wobei $R_n := \sum_1^n \left(\xi_i - \overline{X}^{(n)}\right) \cdot \left(\eta_i - \overline{Y}^{(n)}\right)$ gesetzt wird.

Die **empirische Verteilungsfunktion** der Stichprobe $(\xi_i)_{i=1}^n$ vom Umfang n sei definiert als die Zufallsvariable

• $F_n^{(\omega)}(x) : \Omega \ni \omega \mapsto F_n^{(\omega)}(x) := \frac{1}{n} \sum\limits_1^n 1_{(-\infty,x]} \circ \xi_k(\omega) = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{card}\{k \le n : \xi_k(\omega) \le x\}$ $\qquad (x \in \mathbb{R}$

Zeigen Sie, daß die Zufallsvariablen $\overline{X}^{(n)}, \overline{V}^{(n)}, \overline{C}^{(n)}$ und $F_n^{(\cdot)}(x),\ x \in \mathbb{R}$, *erwartungstreue Schätzer* für Erwartungswert, Varianz, Kovarianz und Verteilungsfunktion sind: Zeigen Sie:

a) $\mathbb{E}(\overline{X}^{(n)}) = a = \mathbb{E}(\xi_0)$, **a1)** geben Sie $\mathbb{V}(\overline{X}^{(n)})$ an,

b) $\mathbb{E}(\overline{V}^{(n)}) = \sigma^2 = \mathbb{V}(\xi_0)$,

c) zeigen Sie : $\mathbb{E}(\overline{C}^{(n)}) = C(\xi_0, \eta_0)$

$\left[\!\left[\ \overline{V}^{(n)} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_i \xi_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i,j} \xi_i\xi_j\right) \quad \text{und} \quad \overline{C}^{(n)} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_i \xi_i\eta_i - \frac{1}{n}\sum_{i,j} \xi_i\eta_j\right)\ \right]\!\right]$

d) $\mathbb{E}\left(\omega \mapsto F_n^{(\omega)}(x)\right) = F(x),\ x \in \mathbb{R}$

e) Zeigen Sie überdies: $\overline{X}^{(n)} \to a = \mathbb{E}(\xi_0)$ (stochastische Konvergenz). Geben Sie eine Abschätzung für die Konvergenzgeschwindigkeit an.

f) Zeigen Sie: Für jedes x konvergieren $F_n^{(\omega)}(x) \to F(x)$ stochastisch.

$\left[\!\left[\right.\right.$ Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist die Zufallsvariable $\omega \mapsto F_n^{(\omega)}(x)$ $\beta(n,p)$-verteilt mit $p = F(x)$. $\left.\left.\right]\!\right]$

g) Mit den obigen Bezeichnungen sei für festes $\omega \in \Omega$ und zugehörigen Stichprobenwerten $\{x_i := \xi_i(\omega), y_i := \eta_i(\omega)\}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $W^{(\omega)}$ auf $\mathbb{R}^2$ – die **empirische Verteilung** – definiert durch $W^{(\omega)} := \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_1^n \varepsilon_{(x_i, y_i)}$. Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, W^{(\omega)}\right)$. $\mathbb{E}^{(\omega)}$ bezeichne den Erwartungswert bezüglich $W^{(\omega)}$, analog seien die Varianz $\mathbb{V}^{(\omega)}$ und Kovarianz $C^{(\omega)}$ definiert. Geben Sie auf $\mathbb{R}^2$ definierte reelle Zufallsvariablen (ξ, η) an, für die gelten:

$\mathbb{E}^{(\omega)}(\xi) = \overline{X}^{(n)}$, $\mathbb{E}^{(\omega)}(\eta) = \overline{Y}^{(n)}$ und $W^{(\omega)}(\xi \le z) = F_n^{(\omega)}(z),\ z \in \mathbb{R}$. $\left[\!\left[\right.\right.$ Randverteilungen von $W^{(\omega)}$! $\left.\left.\right]\!\right]$

Bestimmen Sie auch $\mathbb{V}^{(\omega)}(\xi)$ und $C^{(\omega)}(\xi, \eta)$.

Aufgabe 60: **a)** Sei $f: x \mapsto \sqrt{1-x^2},\ 0 \leq x \leq 1$. Bekanntlich ist $\int\limits_0^1 f dx = \frac{\pi}{4}$. Dies soll mit der Monte Carlo Methode verifiziert werden. $\xi_i, 1 \leq i \leq N$, sei eine Folge unabhängiger in [0,1] gleichverteilter Zufallsvariabler. Wie groß muß N gewählt werden, damit
$|\frac{\pi}{4} - \frac{1}{N}\sum\limits_1^N \sqrt{1-\xi_i^2(\cdot)}| < 0,01$ mit Wahrscheinlichkeit $> 0,95$ gilt?

b) $f : [0,1] \to [0,1]$ sei eine stetige Funktion. $I := \int_0^1 f dx$ kann mittels einer Folge von unabhängigen auf $[0,1]$ gleichverteilten ZV $\{X_i, Y_j : i,j \geq 1\}$ auf folgende Weise berechnet werden:
Seien $Z_n := 1_{\{Y_n < X_n\}},\ n \in \mathbb{N}$.
b1) Zeigen Sie: $I_n := \frac{1}{n}\sum_1^n Z_j \to I$ stochastisch.
b1) Wie groß muß n gewählt werden, damit I_n das gesuchte Integral mit Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,95 auf 2 Dezimalstellen genau approximiert.

Aufgabe 61: Bei einem Glückspiel wird nach folgender Strategie gespielt: Startkapital: S Taler. Es wird eine (faire) Münze geworfen. Beträgt vor der n-ten Runde das Kapital K_{n-1}, so gewinnt der Spieler beim $n-$ten Münzwurf $\frac{2}{3} \cdot K_{n-1}$, falls *Zahl* geworfen wird, und er verliert $\frac{1}{2} \cdot K_{n-1}$, falls *Kopf* geworfen wird.
Zeigen Sie: **a)** $\mathbb{E}(K_n) \to \infty$, und **b)** $K_n \to 0$ stochastisch.
$[\![$ Zeigen Sie, $K_n = Y_1 \cdots Y_n$, mit unabhängigen Z.V. Y_i, $Y_i(W) = \frac{1}{2}\varepsilon_{5/3} + \frac{1}{2}\varepsilon_{1/2}$ $]\!]$

Aufgabe 62: Der *Log-Trig-Algorithmus* zur Erzeugung von $N_{0,1}$-verteilten Zufallszahlen beruht auf folgendem Resultat:
Sei $G : (0,1)^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung $(x,y) \mapsto \big((-2\log x)^{1/2} \cdot \cos 2\pi y,\ (-2\log x)^{1/2} \cdot \sin 2\pi y\big)$.
a) Zeigen Sie, daß G bijektiv und C^1 ist und bestimmen Sie die inverse Abbildung G^{-1}.
b) Bestimmen Sie die Determinante der Funktionalmatrix von G^{-1}.
c) Sei (X,Y) auf dem Einheitsquadrat $(0,1)^2$ gleichverteilt und sei $(U,V) := G(X,Y)$. Dann sind U,V unabhängige reelle $N_{0,1}-$verteilte Zufallsvariable.

Abgabe: in den Kästen im Foyer bis Freitag, 4.7.06 12 Uhr
Sprechstunden im SoSe 2008
W. Hazod: Tel.: 3055. Sprechstunde: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627
Übungsleiter:
W. Grundmann *Tel.: 3432. Sprechstunde: Montag, 9–10 M 613*
A. Kaplun *Tel.: 3437 Sprechstunde: Mittwoch, 13–14.30 M 634*
K. Kosfeld *Tel.: 5917 Sprechstunde: Dienstag, 12–13 M 630*