Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

2.07.2008

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) SS 2008
Blatt 14

Aufgabe 63 **a)** Sei $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2},\ 0 \le x \le 1$. Bekanntlich ist $\int_0^1 f dx = \frac{\pi}{4}$. Dies soll mit der Monte Carlo Methode verifiziert werden. $\xi_i, 1 \le i \le N$, sei eine Folge unabhängiger in [0,1] gleichverteilter Zufallsvariabler. Wie groß muß N gewählt werden, damit
$|\frac{\pi}{4} - \frac{1}{N}\sum_1^N \sqrt{1-\xi_i^2(\cdot)}| < 0,01$ mit Wahrscheinlichkeit $> 0,95$ gilt?

b) *(Qualitätskontrolle)* Die Tagesproduktion einer Maschine enthält in der Regel 5% Ausschuß. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Produktion von 1000 Stück 40 – 100 Ausschußstücke gefunden werden. (Zuerst exakt, dann mittels des ZGWS bestimmen).

c) *(Wahlmanipulation)* 2 Parteien stehen zur Wahl. Die N wahlberechtigten Bürger sind unentschlossen, d.h., sie werden ihre Stimme unabhängig mit Wahrscheinlichkeit 1/2 für eine der beiden Parteien abgeben. Da entschließt man sich in den Führungsgremien der Partei A zu einem Trick: Es wird den n Bürgern eines Nachbarlands das Wahlrecht eingeräumt (in der Annahme, daß diese "Neubürger" aus Dankbarkeit ihre Stimme für A abgeben.)
Sei $\alpha \in (0,1)$. Wie groß muß – in Abhängigkeit von α und N– die Einwohnerzahl n des Nachbarlandes sein, damit A die Wahl mit Wahrscheinlichkeit $> 1-\alpha$ gewinnt?
Sei z.B. $N = 49\ 000\ 000$. Bestimmen Sie n für $\alpha = 0,001, = 0,01$ oder $= 0,1$. Reicht ein Land der Größe von Liechtenstein (24 000 EW) oder Luxemburg (360 000 EW) oder sollte man eher an Österreich denken?
⟦ ZGWS mit Fehlerabschätzung anwenden! ⟧

d) Bei einem Glückspiel kann mit Wahrscheinlichkeit p gewonnen, mit Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$ verloren werden. Ein Spieler betritt das Kasino mit einem Startkapital a (> 0), der Einsatz beträgt bei jeder Spielrunde 1 Euro. $\xi_i \in \{-1, +1\}$ gibt den Gewinn bzw. Verlust bei der i-ten Runde an. Sei $K_N = a + \sum_1^N \xi_i$ das Kapital des Spielers nach N Runden.
Geben Sie obere und untere Schranken für K_N an (mittels GdgZ und ZGWS). Betrachten Sie insbesondere den Fall eines fairen Spiels $p = q = \frac{1}{2}$

Aufgabe 64 **a)** Sei $\lambda > 0$ und sei X eine $\pi_\lambda-$ verteilte Zufallsvariable. Seien für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ $\{X_i^{(n)}, 1 \le i \le n\}$ unabhängige Zufallsvariable mit der Verteilung $X_i^{(n)}(W) = \pi_{\lambda/n}$. Dann gilt
(1) $X = \sum_{i=1}^n X_i^{(n)}$ in Verteilung, (2) $\mathbb{E}X_i^{(n)} = \frac{\lambda}{n} = V(X_i^{(n)})$.
Weiter gilt nach dem Zentralen Grenzwertsatz für alle $x \in \mathbb{R}$:
(3) $W\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \frac{\left(X_i^{(n)} - \lambda/n\right)}{\sqrt{\lambda/n}} \le x\right) \approx \Phi(x)$.
Wegen (1) ergibt die Aussage (3) wenig Sinn. Warum?

b) Beweisen Sie die (korrekte) Approximation der Poissonverteilung durch die Normalverteilung:
Sei X^λ eine $\pi_\lambda-$verteilte Zufallsvariable. Dann gilt für $Y^\lambda := \left(X^\lambda - \lambda\right)/\sqrt{\lambda}$ mit $\lambda \to \infty$:
$W(Y^\lambda < x) \to \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
Oder beweisen Sie die folgende Form: Seien $X^{(k)}$ unabhängige $\pi_\lambda-$verteilte Zufallsvariable. Dann gilt für $S_n := \sum_1^n X^{(k)}$:
$W\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(S_n - n\cdot\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \le x\right) \to \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 65 **Aufgabe 58** Diskutieren Sie die im beiliegenden Blatt gestellte Frage, ob Ein- und Zwei- Euro Münzen *faire* Münzen sind.

Abgabe: in den Kästen im Foyer bis Freitag, 11.7.06 12 Uhr

Sprechstunden im SoSe 2008

W. Hazod: Tel.: 3055. Sprechstunde: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627

Übungsleiter:

W. Grundmann *Tel.: 3432. Sprechstunde: Montag, 9–10 M 613*

A. Kaplun *Tel.: 3437 Sprechstunde: Mittwoch, 13–14.30 M 634*

K. Kosfeld *Tel.: 5917 Sprechstunde: Dienstag, 12–13 M 630*

Studenten haben herausgefunden, daß der Euro asymmetrisch geprägt ist

1

Warschau. Vom Euro dürfen wir einiges erhoffen, doch in einem Punkt sollten wir ihm mißtrauen. Wer eine Euro-Münze auf dem Tisch zum Kreiseln bringt, um nach dem Motto „Kopf oder Zahl" eine wichtige (womöglich kostspielige) Entscheidung herbeizuführen, der sollte wissen, daß der Euro kein gerechter Richter ist. Das haben die polnischen Mathematiker Tomasz Gliszczynski und Waclaw Zawadowski herausgefunden. Verwandte aus Belgien hatten ihnen vor Weihnachten die ersten neuen Münzen mitgebracht.

Gliszczynski, der an der Akademia Podlaska im ostpolnischen Siedlce Statistik lehrt, und seine Studenten warfen die Ein-Euro-Münze 250mal. 140mal zeigte sie den massigen Kopf des belgischen Königs Albert, nur 110mal die Zahl. Gliszczynski kommt zu dem Schluß: „Der Euro ist asymmetrisch geprägt. Ich kenne das Phänomen von anderen Münzen,

2

etwa vom Zwei-Zloty-Stück, das wir mehr als 10 000mal geworfen haben."

Bei Versuchsreihen mit verschiedenen Cent-Münzen war das Ungleichgewicht zu Gunsten König Alberts noch deutlicher. Auf dem nächsten Kongreß der Mathematiklehrer im pommerschen Badeort Misdroy, zu dem auch Kollegen aus Deutschland erwartet werden, will Gliszczynski Anfang Februar auch die deutschen Euro-Münzen dem „Gerechtigkeitstest" unterziehen. Ob die asymmetrische Prägung auch beim Wurf in die Luft die Seite mit König Albert begünstigt, haben die Mathematiker noch nicht überprüft. Anders als bei der Kreiselmethode vermutet Zawadowski in diesem Falle nur eine „vernachlässigenswerte Abweichung". Doch diese Hypothese ist noch zu verifizieren – auf jeden Fall vor der Fußball-WM, bei welcher der Münzwurf über die Seitenwahl und womöglich über

(I)

3

Glück und Unglück ganzer Nationen entscheidet.

Die Ungerechtigkeit der Münze, verbunden mit der anhaltenden Schwäche des Euro gegenüber dem Zloty, dürfte die Skepsis der Polen gegenüber der Währung und ihr traditionell großes Vertrauen in den Dollar weiter verstärken. Nach einer Umfrage sind nur 34 Prozent der Polen für einen Beitritt ihres Landes zur

4

Euro-Zone. Finanzminister Marek Belka sagte am Dienstag, der Beitritt könne günstigstenfalls im Jahre 2007 erfolgen. Doch schon an der Einführung des Euro hatte Polen seinen Anteil: Ein Teil der aus zwei Legierungen bestehenden Münzen wurde wegen Überlastung der EU-Kapazitäten in der Warschauer Geldprägestelle „zusammengesetzt".

Quelle: Gerhard Gnauck, DIE WELT, 03.01.2002.

(II)

Auch das INSTITUT FÜR STATISTIK DER LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT in München ist daraufhin der Hypothese „Die neuen Münzen sind unfair" im Auftrag von Stern-TV nachgegangen.

Dafür wurden am Institut unter der Leitung von HELMUT KÜCHENHOFF mehrere Versuche durchgeführt. Die deutsche 1-Euro-Münze und die deutsche 2-Euro-Münze wurden von 16 Personen jeweils 50mal gedreht und 50mal geworfen. Die verschiedenen Personen benutzten jeweils eine neue Euro-Münze. Insgesamt gab es also vier Versuchsreihen mit je 800 Versuchen.

Versuchsreihe N = 800	h Anteil von „Zahl oben"
Werfen der 1-€-Münze	0.50750
Drehen der 1-€-Münze	0.51375
Werfen der 2-€-Münze	0.49375
Drehen der 2-€-Münze	0.61875

relative Häufigkeiten.

(I)

Betrachten wir nun die obigen Schilderungen im Lichte der Grenzwertsätze. Reichen 250 Versuche schon aus, um die in dem Zeitungsartikel behaupteten Dinge zu glauben?

(II)

Besonders bei der letzten Versuchsreihe – dem Drehen der 2-Euro-Münzen – wurde auffällig oft „Zahl oben" beobachtet. Kann man daraus aber schließen, daß die Münze unfair ist? Oder ist das eher eine zufällige Erscheinung?

Tafel V: Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung $\Phi(x)$

(…, Stoch. f. Ingenieure)

$F_{Nor}(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \, dz$, $-3 \le x \le 3$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	x
-3.0	.001350	.001306	.001264	.001223	.001183	.001144	.001107	.001070	.001035	.001001	-3.0
-2.9	.001866	.001807	.001750	.001695	.001641	.001589	.001538	.001489	.001441	.001395	-2.9
-2.8	.002555	.002477	.002401	.002327	.002256	.002186	.002118	.002052	.001988	.001926	-2.8
-2.7	.003467	.003364	.003364	.003167	.003078	.002980	.002890	.002803	.002718	.002635	-2.7
-2.6	.004661	.004527	.004527	.004269	.004145	.004025	.003907	.003793	.003681	.003573	-2.6
-2.5	.006210	.006037	.006037	.005703	.005543	.005386	.005234	.005085	.004940	.004799	-2.5
-2.4	.008198	.007976	.007700	.007549	.007344	.007143	.006947	.006756	.006569	.006387	-2.4
-2.3	.010724	.010444	.010170	.009903	.009642	.009387	.009138	.008894	.008656	.008424	-2.3
-2.2	.013903	.013553	.013209	.012874	.012546	.012224	.011911	.011604	.011304	.011011	-2.2
-2.1	.017864	.017429	.017003	.016586	.016177	.015778	.015386	.015003	.014629	.014262	-2.1
-2.0	.022750	.022216	.021692	.021178	.020675	.020182	.019699	.019226	.018763	.018309	-2.0
-1.9	.028717	.028067	.027429	.026803	.026190	.025588	.024998	.024419	.023852	.023296	-1.9
-1.8	.035930	.035148	.034380	.033625	.032884	.032157	.031443	.030742	.030054	.029397	-1.8
-1.7	.044566	.043633	.042716	.041815	.040930	.040059	.039204	.038364	.037538	.036727	-1.7
-1.6	.054799	.053699	.052616	.051551	.050503	.049472	.048457	.047460	.064479	.045514	-1.6
-1.5	.066807	.065522	.064256	.063008	.061780	.060571	.059380	.058208	.057053	.055917	-1.5
-1.4	.080757	.079270	.077804	.076358	.074934	.073529	.072145	.070781	.069437	.068111	-1.4
-1.3	.096800	.095098	.093418	.091759	.090123	.088508	.086915	.085344	.083793	.082264	-1.3
-1.2	.115070	.113139	.111232	.109349	.107488	.105650	.103835	.102042	.100273	.098525	-1.2
-1.1	.135666	.133500	.131357	.129238	.127143	.125072	.123024	.121000	.119000	.117023	-1.1
-1.0	.158655	.156248	.153864	.151505	.149170	.146859	.144572	.142310	.140071	.137857	-1.0
-0.9	.184060	.181411	.178786	.176186	.173609	.171056	.168528	.166023	.163543	.161087	-0.9
-0.8	.211855	.208970	.206108	.203269	.200454	.197662	.194894	.192150	.189430	.186733	-0.8
-0.7	.241964	.238852	.235762	.232695	.229650	.226627	.223627	.220650	.217695	.214764	-0.7
-0.6	.274253	.270931	.267629	.364347	.261086	.257846	.254627	.251429	.248252	.245097	-0.6
-0.5	.308538	.305026	.301532	.297056	.294598	.291160	.287740	.284339	.280957	.277595	-0.5
-0.4	.344578	.340903	.337243	.333598	.329969	.326969	.322758	.319178	.315614	.312067	-0.4
-0.3	.382089	.378280	.374384	.370700	.366928	.363169	.359424	.355691	.351973	.348268	-0.3
-0.2	.420740	.416834	.412936	.409046	.405165	.401294	.397432	.393580	.389739	.385908	-0.2
-0.1	.460172	.456205	.452242	.448283	.444330	.440382	.436440	.432505	.428576	.424655	-0.1
-0.0	.500000	.496011	.492022	.488034	.484047	.480062	.476078	.472097	.468119	.464144	-0.0

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	x
0.0	.500000	.503989	.507978	.511996	.515953	.519938	.523922	.527903	.531881	.535856	0.0
0.1	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670	.559618	.563560	.567495	.571424	.575345	0.1
0.2	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092	0.2
0.3	.617911	.621720	.625616	.629300	.633072	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732	0.3
0.4	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933	0.4
0.5	.691462	.694974	.698468	.702944	.705402	.708840	.712260	.715661	.719043	.722405	0.5
0.6	.725747	.729069	.732371	.735653	.738914	.742154	.745375	.748571	.751748	.754903	0.6
0.7	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236	0.7
0.8	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546	.802388	.805106	.807850	.810570	.813267	0.8
0.9	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913	0.9
1.0	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143	1.0
1.1	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857	.874928	.876976	.879000	.881000	.882977	1.1
1.2	.884930	.886861	.888768	.890651	.892512	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475	1.2
1.3	.903200	.904902	.906582	.908241	.909877	.911492	.913085	.914656	.916207	.917736	1.3
1.4	.919243	.920730	.922196	.923642	.925066	.926471	.927855	.929219	.930563	.931889	1.4
1.5	.933193	.934478	.935744	.936922	.938220	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083	1.5
1.6	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497	.950528	.951543	.952540	.953521	.954486	1.6
1.7	.955434	.956367	.957284	.958185	.959070	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273	1.7
1.8	.964070	.964852	.965620	.966375	.967116	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621	1.8
1.9	.971283	.971933	.972571	.973197	.973810	.974412	.975002	.975581	.976138	.976704	1.9
2.0	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691	2.0
2.1	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738	2.1
2.2	.986097	.986447	.986791	.987126	.987454	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989	2.2
2.3	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358	.990613	.990862	.991106	.991344	.991576	2.3
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613	2.4
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201	2.5
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427	2.6
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365	2.7
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074	2.8
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605	2.9
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999	3.0